פרק 8 – תנועה במישור

זריקה משופעת ותנועה מעגלית

תנועה במישור היא תנועה שבה המסלול שלאורכו נע הגוף נמצא במישור מסוים.

קיימות הרבה תנועות סביבנו שנחשבות לתנועה במישור. אחת החשובות מבניהן היא תנועת גוף הנזרק על פני כדור הארץ בזווית מסוימת. במקרה זה מסלול הגוף הוא קו עקום שכל נקודותיו נמצאות במישור אחד הניצב לפני הקרקע.

גם תנועה מעגלית היא תנועה במישור. במקרה זה כל הנקודות שעל מסלולו של הגוף נמצאות במישור מסוים, ומרחקן מנקודה קבועה הנמצאת במישור זה הוא קבוע. תנועת כוכבי הלכת סביב השמש או תנועת הירחים סביב כוכבי הלכת נחשבות במקרים רבים ובקירוב טוב לתנועה מעגלית.

תנועה במישור היא הכללה של התנועה בקו ישר. תנועה בקו ישר היא תנועה בממד אחד. תנועה במישור היא תנועה בשני ממדים. לכן פרק זה נחשב הכללה לפרק 2, שהוא תנועה בקו ישר.

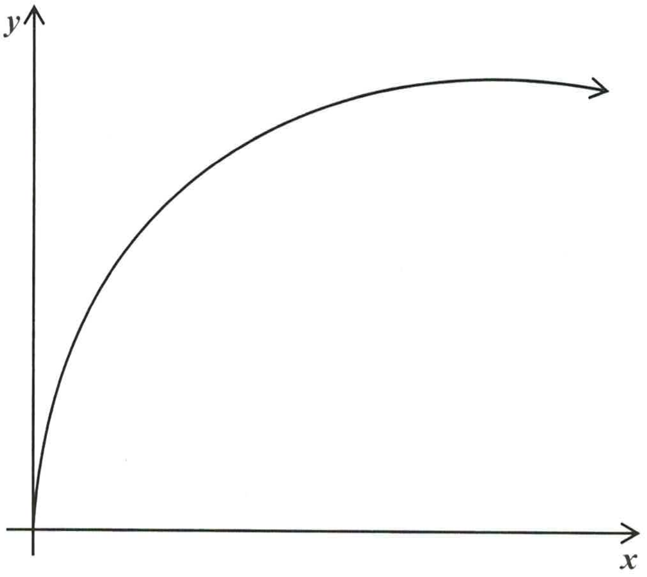
בפרק זה נלמד על הגדלים הקינמטיים הקשורים לתנועה במישור, ובנוסף נחקור בהרחבה שתי תנועות חשובות המייצגות תנועה במישור; תנועת גוף הנזרק בזווית על פני כדור הארץ ותנועה מעגלית.

1. גדלים קינמטיים בתנועה במישור

1.1 המיקום בתנועה במישור

באיור 1 מתואר מסלול גוף הנע במישור (מישור הדף). על מנת שיהיה אפשרי לקבוע את מיקומו של גוף זה ברגע מסוים, צריכים מערכת צירים המורכבת משני צירים הנמצאים במישור תנועת הגוף (במישור הדף). לציר הראשון נקרא ציר x ולציר השני, הניצב לו, נקרא ציר y (ראה איור 1).

נקודת חיתוך שני הצירים נקראת ראשית מערכת הצירים, והיא תמוקם בדרך כלל במיקומו של הצופה. מערכת צירים זו נקראת מערכת צירים קרטזית או מערכת צירים דיקרטית - על שמו של פילוסוף הטבע רנה דקרת $\left(1596-1650\right)$, שהיה הראשון שתיאר מערכת צירים זו והשתמש בה.

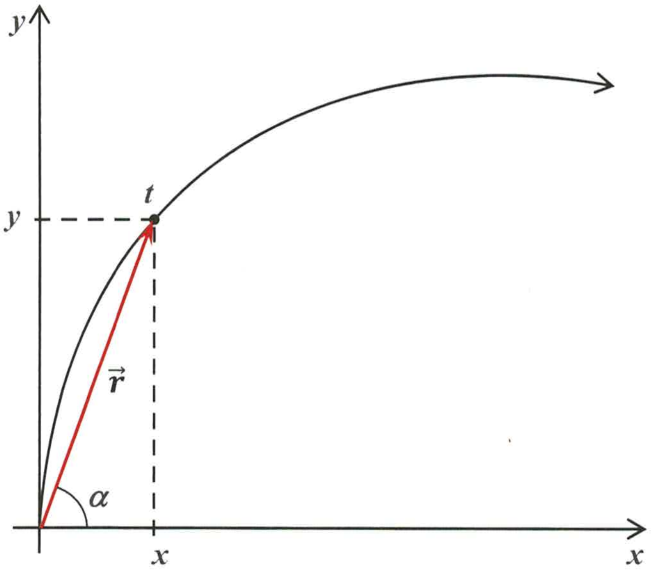


איור 1: לקביעת מיקומו של גוף נע במישור נעזר במערכת צירים xy הנמצאת במישור תנועת הגוף.

מיקומו של הגוף בזמן מסוים t נקבע במערכת הצירים xy באמצעות אחת משתי דרכים:

הדרך הראשונה (קואורדינטות המיקום):

מיקומו של גוף בזמן מסוים t נקבע על ידי שיעורי x ו-y של הנקודה בה נמצא הגוף בזמן זה כפי שמתואר באיור 2. שיעורי המיקום מסומנים בכתיב הבא: (x,y).



איור 2: מיקום הגוף נקבע על ידי קואורדינטות המיקום או על ידי וקטור המיקום.

הדרך השנייה (וקטור המיקום):

מיקומו של הגוף בזמן מסוים t נקבע על ידי וקטור המיקום, שהוא וקטור המתחיל מראשית הצירים ומסתיים במיקומו של הגוף בזמן הנדרש. וקטור זה מסומן ב-$\vec{r}$. אורכו של וקטור המיקום מבטא את מרחק הנקודה מהראשית וכיוונו מבטא את הזווית בין וקטור המיקום והכיוון החיובי של ציר x (ראה איור 2). הזווית α נחשבת לחיובית כאשר בתנועתנו מהחלק החיובי של ציר x

לווקטור המיקום אנו מתקדמים נגד כיוון מחוגי השעון, ושלילית כאשר מתקדמים מהחלק החיובי של ציר x לווקטור המיקום בכיוון מחוגי השעון.

ניתן לעבור מייצוג המיקום בדרך אחת לייצוג המיקום בדרך אחרת. אם נתונים שיעורי המיקום x ו- y נקבל:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

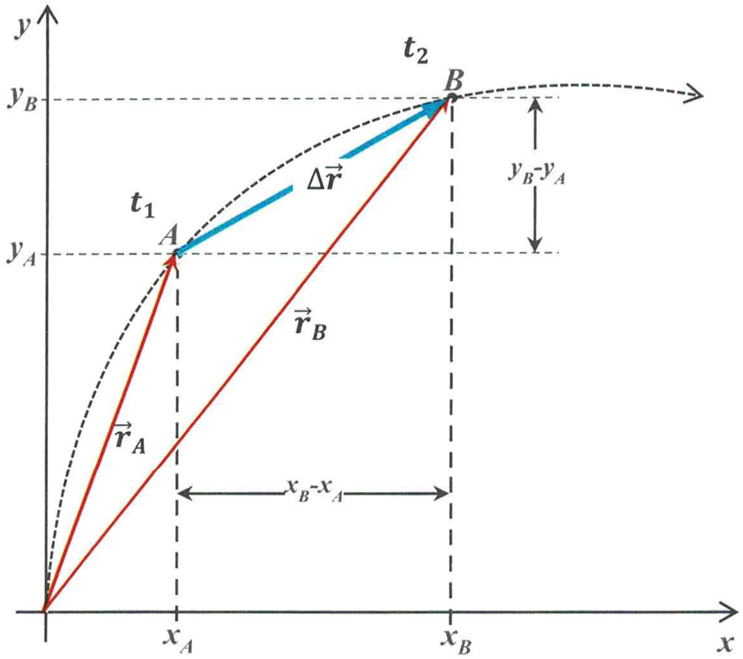
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \tag{2}$$

ואם נתון וקטור המיקום $\vec{r}$ (גודל וכיוון), נקבל:

$$x = r\cos\alpha \tag{3}$$
$$y = r\sin\alpha \tag{4}$$

1.2 העתק במישור

אם הגוף היה בזמן מסוים t_1 בנקודה A ששיעוריה הם (x_A, y_A) ווקטור המיקום שלה $\vec{r}_A$ כפי שמתואר באיור 3, ומאוחר יותר, בזמן t_2, הגוף הגיע לנקודה B ששיעוריה הם (x_B, y_B) ווקטור המיקום שלה $\vec{r}_B$ (ראה איור 3), אז העתקו של הגוף בפרק הזמן מ-t_1 עד t_2 הוא הווקטור המחבר את הנקודה A עם הנקודה B (ראה איור 3). וקטור ההעתק מסומן ב- $\Delta\vec{r}$. אורכו של וקטור זה מבטא את מרחק הנקודה B מהנקודה A, וכיוונו מבטא את הזווית שווקטור זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x.



איור 3: ההעתק במישור בין שתי נקודות.

לווקטור ההעתק יש שני רכיבים. הראשון בכיוון ציר x ומסומן Δr_x והאחר בכיוון ציר y ומסומן Δr_y. מתקיים:

$$\Delta r_x = x_B - x_A = \Delta x \tag{5}$$

$$\Delta r_y = y_B - y_A = \Delta y \tag{6}$$

מכיוון שמתקיים (ראה איור 3):

$$\begin{cases} x_A = (r_A)_x \\ y_A = (r_A)_y \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = (r_B)_x \\ y_B = (r_B)_y \end{cases} \tag{7}$$

נקבל מהקשרים האחרונים וממשוואות (5) ו-(6) ש:

$$\Delta r_x = (r_B)_x - (r_A)_x \tag{8}$$

$$\Delta r_y = (r_B)_y - (r_A)_y \tag{9}$$

שני הקשרים האחרונים הם רכיבי x ו- y של המשוואה הווקטורית הבאה:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \tag{10}$$

לחישוב גודלו וכיוונו של הווקטור $\Delta\vec{r}$ נעזרים בקשרים הבאים:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{11}$$

$$\tan\alpha = \Delta y / \Delta x \tag{12}$$

1.3 מהירות ממוצעת בתנועה במישור

אם הגוף היה בזמן t_1 בנקודה A ששיעוריה הם (x_A, y_A), כפי שמתואר באיור 3, ובזמן מאוחר יותר t_2 בנקודה B ששיעוריה הם (x_B, y_B), כך שהעתקו הוא $\Delta\vec{r}$ (ראה איור 3), אז המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $\Delta t = t_2 - t_1$ מוגדרת כמהירות הקבועה (גודל וכיוון) אשר אם הגוף ינוע בה העתקו יהיה זהה להעתק הקודם (כלומר הוא יגיע מהנקודה A לנקודה B לאורך קו ישר, באותו פרק זמן). המהירות הממוצעת מסומנת ב- $\bar{v}$, ומכיוון שהיא גודל וקטורי רושמים $\bar{\vec{v}}$. על פי הגדרת המהירות הממוצעת מתקיים:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{13}$$

על פי הגדרה זו גודלה של המהירות הממוצעת הוא $\Delta r / \Delta t$ וכיוונה בכיוון וקטור ההעתק $\Delta\vec{r}$. במערכת הצירים xy קיימים למהירות הממוצעת שני רכיבים, האחד בכיוון ציר x והאחר בכיוון ציר y. מתקיים:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta r_x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{14}$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta r_y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{15}$$

אם נתונים הרכיבים $\bar{v}_x$ ו- $\bar{v}_y$ של המהירות הממוצעת, נוכל לחשב את גודלה וכיוונה של המהירות הממוצעת על ידי הקשרים:

$$\bar{v} = \sqrt{(\bar{v}_x)^2 + (\bar{v}_y)^2} \tag{16}$$

$$\tan\alpha = \frac{\bar{v}_y}{\bar{v}_x} \tag{17}$$

דוגמה חישובית:

גוף נע במישור במסלול כל שהוא. בזמן מסוים הגוף עובר בנקודה A ששיעוריה $(2\,\text{m}, 6\,\text{m})$ ולאחר שתי שניות הוא חולף בנקודה B, ששיעוריה $(10\,\text{m}, 12\,\text{m})$ (ראה תרשים בהמשך).

א. חשב את רכיבי העתק הגוף בפרק הזמן הנתון, בכיווני הצירים x ו- y.

ב. חשב את גודלו וכיוונו של וקטור ההעתק בפרק הזמן הנתון.

ג. חשב את וקטור המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן הנתון.

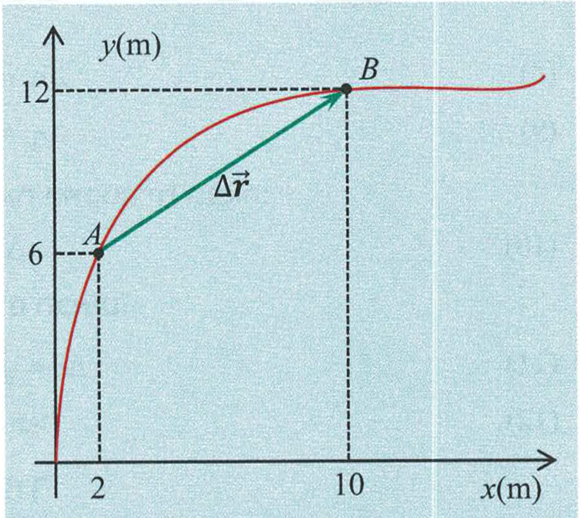
ד. חשב את רכיבי המהירות הממוצעת.

פתרון:

א.

$$\Delta x = x_B - x_A = 10 - 2 = 8\,\text{m}$$

$$\Delta y = y_B - y_A = 12 - 6 = 6\,\text{m}$$



ב.

$$\Delta r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10\,\mathrm{m}$$

$$\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6}{8}\quad\Rightarrow\alpha=36.87^\circ$$

ג. מתקיים: $\bar{\vec{v}}=\Delta\vec{r}/\Delta t$. על פי קשר זה, גודלה של המהירות הממוצעת הוא:

$$\bar{v}=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{10\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}}=5\,\mathrm{m/s}$$

וכיוונה הוא בכיוון $\Delta\vec{r}$ (זווית 36.87° עם הכיוון החיובי של ציר x).

ד. ניתן לחשב את רכיבי המהירות הממוצעת בשתי דרכים. לפי הקשרים:

$$\begin{cases}\bar{v}_x=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{8\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}}=4\,\mathrm{m/s}\\[2ex]\bar{v}_y=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{6\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}}=3\,\mathrm{m/s}\end{cases}$$

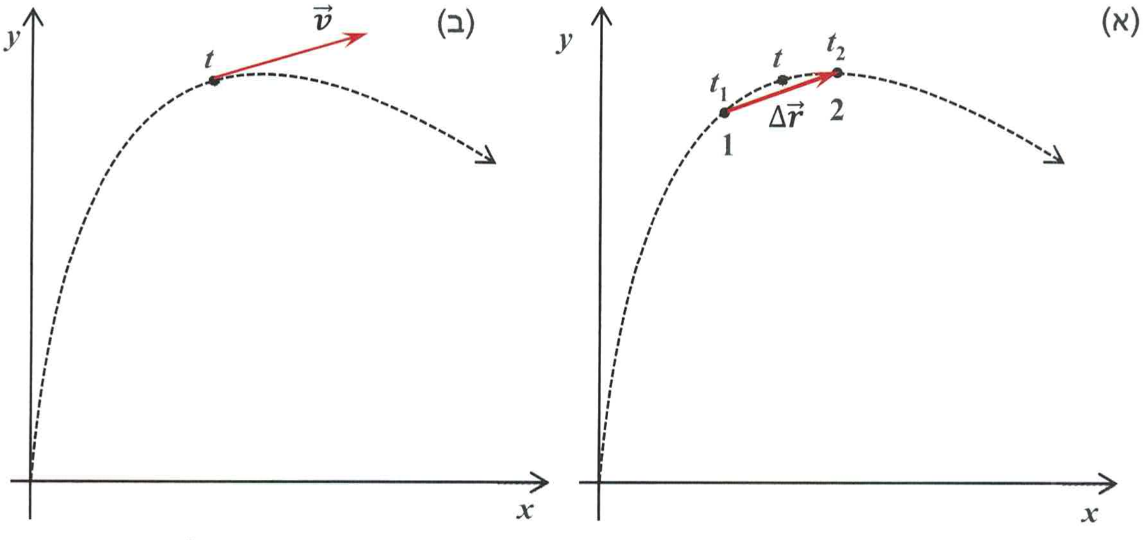
או לפי הקשרים:

$$\begin{cases}\bar{v}_x=\bar{v}\cos\alpha=5\cos(36.87)=4\,\mathrm{m/s}\\ \bar{v}_y=\bar{v}\sin\alpha=5\sin(36.87)=3\,\mathrm{m/s}\end{cases}$$

1.4 מהירות רגעית בתנועה במישור

המהירות הרגעית של גוף מוגדרת כמהירות של הגוף ברגע נתון. המהירות הרגעית מסומנת באות v ומכיוון שמהירות זו במישור היא וקטור רושמים $\vec{v}$.

על מנת לחשב את המהירות הרגעית בזמן t במהלך תנועתו של גוף במישור, כפי שמתואר באיור 4, נבחר שני זמנים t_1 ו- t_2 סביב הזמן t, כך שבזמן t_1 הגוף נמצא בנקודה 1 ובזמן t_2 הגוף נמצא בנקודה 2 (ראה תרשים 4א).



איור 4: הגודל $\Delta\vec{r}/\Delta t$ בין שני זמנים סביב זמן t מבטא את המהירות הממוצעת של הגוף בין זמנים אלה. (ב) כאשר $\Delta t\to 0$, הגודל $\Delta\vec{r}/\Delta t$ מתקרב למהירות הרגעית בזמן t. גודל זה מכוון בכיוון המשיק למסלול.

אם נסמן את העתק הגוף בפרק הזמן $\Delta t=t_2-t_1$ ב- $\Delta\vec{r}$, אז הגודל:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\tag{18}$$

מבטא את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $\Delta t=t_2-t_1$. מהירות זו שונה מהמהירות

הרגעית בזמן t.

על מנת להתקרב למהירות בזמן t עלינו להקטין את פרק הזמן $\Delta t = t_2 - t_1$ שבחרנו סביב הזמן t. ככל ש-Δt קטן יותר הגודל $\Delta\vec{r}/\Delta t$ קרוב יותר למהירות הגוף בזמן t. כאשר $\Delta t \to 0$ אז הגודל $\Delta\vec{r}/\Delta t$ מתקרב לערך מסוים סופי (שנקרא בהגה המתמטית "גבול") שהוא מהירות הגוף בזמן t (ראה איור 4ב). מבטאים פעולה זו על ידי הכתיב המתמטי הבא:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (19)$$

כלומר המהירות הרגעית היא הגבול של הגודל $\Delta\vec{r}/\Delta t$ כאשר $\Delta t \to 0$.

הערות:

1. על פי הקשר האחרון כיוון המהירות הרגעית הוא בכיוון הווקטור $\Delta\vec{r}$ כאשר $\Delta t \to 0$.
2. כאשר Δt קטן, שתי הנקודות 1 ו-2 שבאיור 4א מתקרבות לנקודה שבה הזמן שווה ל-t, ווקטור ההעתק $\Delta\vec{r}$ מתקרב להיות המשיק של המסלול בזמן t. כאשר $\Delta t \to 0$, וקטור ההעתק הופך להיות המשיק למסלול הגוף בזמן t. **מכאן שכיוון המהירות הרגעית בזמן מסוים הוא בכיוון המשיק למסלול הגוף בזמן זה** (ראה איור 4ב).
3. רכיבי המהירות הרגעית בכיווני הצירים x ו-y הם:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (20)$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (21)$$

1.5 התאוצה במישור

ניתן להוכיח שבמקרה של גוף הנע במסלול עקום במישור מתקיימים שני ההיגדים הבאים:

1. תמיד פועל כוח על הגוף.
2. הכוח יוצר זווית עם המהירות בכל נקודות המסלול (יוצר זווית עם המשיק למסלול בכל נקודות המסלול).

ניתן בקלות להוכיח שני היגדים אלה. את ההיגד הראשון נוכח בדרך השלילה. אם נניח ששקול הכוחות הפועלים על הגוף מתאפס נקבל, על פי החוק הראשון של ניוטון, שהגוף נע במהירות קבועה ובקו ישר. מכיוון שהגוף במקרה שבדיון אינו נע בקו ישר, נקבל שפועל עליו כוח שקול השונה מאפס.

גם את ההיגד השני ניתן להוכיח בדרך השלילה. אם נניח שכיוון הכוח הוא בכיוון המהירות, נקבל על פי החוק השני של ניוטון שגם כיוון תאוצת הגוף הוא בכיוון המהירות. אם כיוון התאוצה הוא בכיוון המהירות, הגוף חייב לנוע בקו ישר. מכיוון שנתון שהגוף נע במסלול עקום ולא בקו ישר, אז בוודאי התאוצה וגם הכוח אינם מכוונים בכיוון המהירות אלא יוצרים זווית עם המהירות.

מכיוון שעל הגוף הנע במסלול עקום במישור פועל בכל נקודות המסלול, כוח היוצר זווית עם המסלול (עם המשיק למסלול) נקבל, על פי החוק השני של ניוטון:

1. יש לגוף הנע במסלול עקום במישור תאוצה בכל נקודות המסלול.
2. כיוון התאוצה יוצר זווית ביחס למשיק בכל נקודות המסלול.

את גודלה וכיוונה של התאוצה ניתן לחשב באחת משתי הדרכים: הדרך הראשונה, על פי החוק השני של ניוטון כך שמתקיים:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} \qquad (22)$$

על פי קשר זה גודל התאוצה שווה ל-$\Sigma F/m$ וכיוונה בכיוון הכוח השקול.

הדרך השנייה היא באמצעות השינוי במהירות הגוף. למהירות הגוף בכל נקודה יש שני רכיבים, אחד בכיוון ציר x והאחר בכיוון ציר y. מכיוון שיש לגוף תאוצה, שני רכיבים אלה משתנים. כלומר יש לגוף תאוצה בכיוונים x ו- y, כך שמתקיים (ראה פרק 2 סעיף 2.4):

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{23}$$

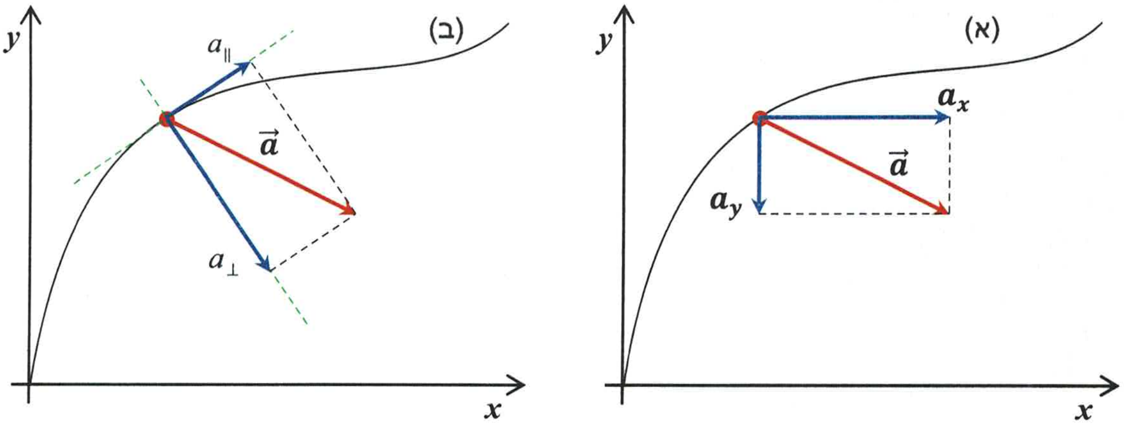
$$a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \tag{24}$$

שתי המשוואות האחרונות הן הרכיבים בכיוון ציר x ובכיוון ציר y של המשוואה הווקטורית הבאה:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{25}$$

משוואה זו היא ההגדרה של התאוצה הרגעית בתנועה במישור.

כאמור, התאוצה בתנועה במישור אינה מכוונת בכיוון המשיק למסלול, אלא יוצרת בכל נקודה זווית ביחס למשיק למסלול כפי שמתואר באיור 5. במערכת הצירים xy יש לתאוצה זו, כאמור, שני רכיבים: a_x ו- a_y (ראה איור 5א). a_x מבטא את קצב שינוי המהירות בכיוון ציר x ו- a_y מבטא את קצב שינוי המהירות בכיוון ציר y.



איור 5: (א) התאוצה בתנועה במישור והרכיבים של a_x ו-a_y במערכת הצירים xy. (ב) רכיבי התאוצה בכיוון המשיק ובכיוון ניצב לו; $a_\parallel$ ו- $a_\perp$.

נהוג גם לפרק את התאוצה $\vec{a}$ בתנועה במישור לרכיבים ביחס למשיק למסלול; הראשון בכיוון המשיק, אותו נסמן ב-$a_\parallel$ (מקביל למשיק), והשני בכיוון ניצב למשיק, שיסומן ב- $a_\perp$ (ראה איור 5ב).

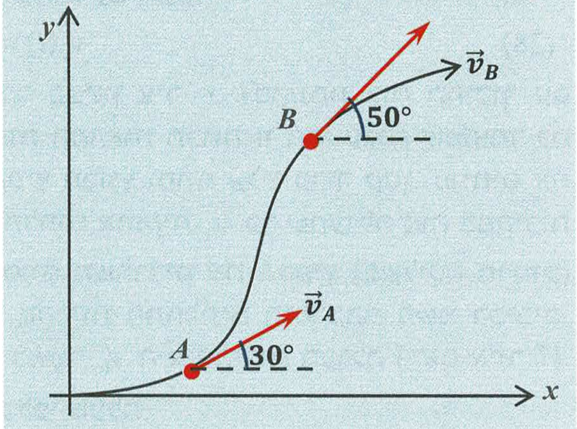
$a_\parallel$ מבטא את קצב שינוי המהירות בכיוון המשיק ו- $a_\perp$ מבטא את קצב שינוי המהירות בכיוון ניצב למשיק.

רכיבים אלה של התאוצה ממלאים תפקיד חשוב בתנועת גוף במישור. על מנת לעמוד על התפקיד שכל אחד משני רכיבים אלה ממלא בתנועה במישור, נניח כי אחד הרכיבים מתאפס ונבדוק מהי השפעתו של הרכיב האחר על התנועה:

1. אם מניחים ש- $a_\perp = 0$ ו- $a_\parallel \neq 0$, נקבל מצב שבו התאוצה מכוונת בכיוון המהירות. מכיוון שכיוון התאוצה הוא בכיוון המהירות, הגוף ממשיך לנוע בקו ישר בכיוון המהירות, במהירות שגודלה משתנה. מכאן ש-$a_\parallel$ הוא גורם לשינוי גודל מהירות הגוף אך לא לשינוי כיוונה.
2. אם מניחים ש- $a_\parallel = 0$ ו- $a_\perp \neq 0$, נקבל מצב שבו גודל המהירות אינו משתנה (בגלל ש- $a_\parallel = 0$), אך כיוונה חייב להשתנות, אחרת תאוצת הגוף מתאפסת ולכן גם $a_\perp$ מתאפס. מכאן ש- $a_\perp$ הוא גורם לשינוי כיוון מהירות הגוף אך לא לשינוי גודלה.

דוגמה לתאוצה במישור:

גוף נע במישור במסלול עקום. נתון שבזמן t_1 הגוף עובר בנקודה A במהירות של $6\,\text{m/s}$, שכיוונה יוצר זווית בת 30° עם הכיוון החיובי של ציר x, כפי שמתואר בתרשים הבא:



בזמן מאוחר יותר t_2 הגוף עובר בנקודה B במהירות של $10\,\text{m/s}$ שכיוונה יוצר זווית בת 50° עם הכיוון החיובי של ציר x (ראה תרשים). נתון: $t_2 - t_1 = 2\,\text{s}$.

א. קבע מהי הזווית שיוצר המשיק למסלול בכל אחת משתי הנקודות A ו-B עם הכיוון החיובי של ציר x.

ב. חשב את התאוצה הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $t_2 - t_1$.

פתרון:

א. המהירות הרגעית של הגוף בנקודה מסוימת על המסלול פונה בכיוון המשיק למסלול בנקודה זו. מכאן שכיוון המשיק בכל אחת משתי הנקודות A ו-B הוא בכיוון המהירויות בנקודות אלה. לכן המשיק בנקודה A יוצר זווית בת 30° עם הכיוון החיובי של ציר x, ובנקודה B הוא יוצר זווית בת 50° עם הכיוון החיובי של ציר x.

ב. מתקיים:

$$\bar{a}_x = \frac{(v_B)_x - (v_A)_x}{\Delta t} = \frac{10\cos 50 - 6\cos 30}{2} =$$
$$= 0.616\,\text{m/s}^2$$

$$\bar{a}_y = \frac{(v_B)_y - (v_A)_y}{\Delta t} = \frac{10\sin 50 - 6\sin 30}{2} =$$
$$= 2.33\,\text{m/s}^2$$

מכאן:

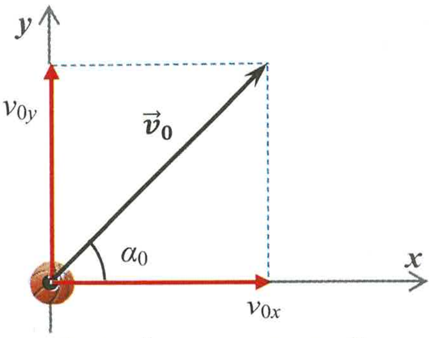
$$\bar{a} = \sqrt{2.33^2 + 0.616^2} = 2.41\,\text{m/s}^2$$

$$\tan\alpha = \frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x} = \frac{2.33}{0.616} \qquad \Rightarrow \alpha = 75.19^\circ$$

2. זריקה בזווית כלפי מעלה

כאשר זורקים גוף על פני כדור הארץ בזווית כלפי מעלה, הגוף נע במסלול עקום עד שהוא פוגע בקרקע. תנועה זו נחשבת לתנועה במישור כי מסלול תנועתו של הגוף נמצא במישור אחד הניצב לפני הקרקע (בהנחה שפני הקרקע אופקיים).

באיור 6 מתואר גוף הנזרק בזמן $t = 0$ במהירות התחלתית שגודלה v_0 ובזווית α_0 ביחס לקרקע. בסעיף זה נחקור את תנועת הגוף מבחינת תאוצה, מהירות ומיקום כפונקציה של הזמן. לשם כך נבחר מערכת צירים xy הנמצאת במישור תנועת הגוף. ציר x מקביל לפני הקרקע וכיוונו החיובי בכיוון תנועת הגוף, ציר y ניצב לפני הקרקע וכיוונו החיובי כלפי מעלה, והראשית בנקודה ממנה נזרק הגוף (ראה איור 6).



איור 6: זריקה בזווית כלפי מעלה.

2.1 התאוצה

בהעדר כוח החיכוך עם האוויר, הכוח היחיד הפועל על הגוף הנזרק על פני כדור הארץ הוא כוח הכובד $F_G = mg$ בכיוון מטה, לכן במערכת הצירים המתוארת באיור 6, נקבל $\Sigma F_x = 0$ ו-$\Sigma F_y = -mg$. על פי החוק השני של ניוטון נקבל ש-$a_x = 0$ ו-$a_y = -g$.

2.2 המהירות

במערכת הצירים המתוארת באיור 6 יש למהירות ההתחלתית של הגוף שני רכיבים:

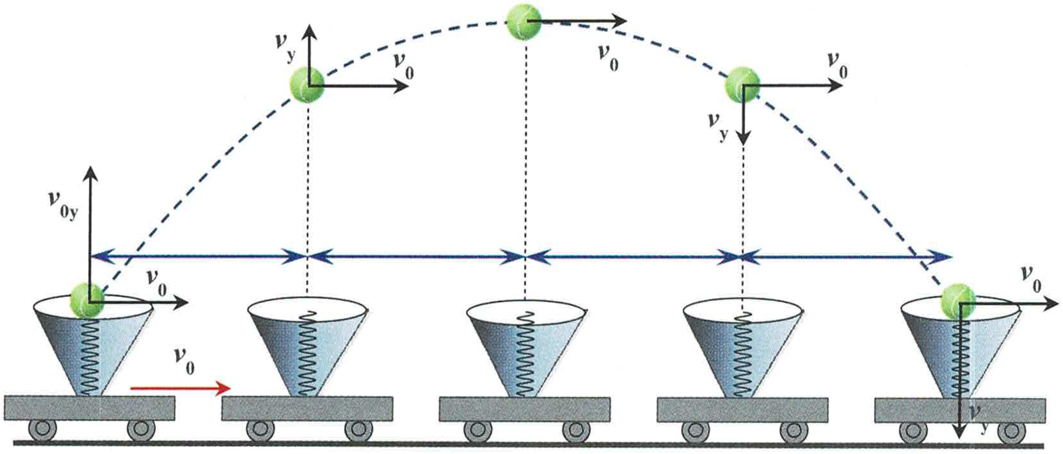
$$v_{0x}=v_0\cos\alpha_0 \qquad (26)$$

$$v_{0y}=v_0\sin\alpha_0 \qquad (27)$$

מכיוון ש-$a_x=0$, רכיב המהירות בכיוון ציר x אינו משתנה עם הזמן:

$$v_x(t)=v_{0x}=v_0\cos\alpha_0 \qquad (28)$$

כלומר הגוף הנזרק בזווית על פני כדור הארץ עובר בכיוון ציר x (בהזנחת כוח החיכוך עם האוויר), העתקים שווים בזמנים שווים. אחת ההדגמות המראות תכונה זו היא עגלה שמוצמד לה סל ובתוכו מצוי קפיץ אנכי הקשור לבסיס הסל. הקפיץ מכווץ ומונח עליו כדור קטן. מניחים את העגלה על משטח אופקי חלק ומקנים לה מהירות התחלתית אופקית v_0 כך שהעגלה נעה במהירות קבועה על המשטח, כפי שמתואר באיור 7. ברגע מסוים משחררים את הקפיץ (בשליטה מרחוק באמצעות מתקן מיוחד. כתוצאה מכך הכדור מקבל מהירות התחלתית המורכבת משני רכיבים, הראשון v_{0y} בכיוון ציר y, והשני v_0 בכיוון ציר x, כאשר v_0 היא מהירות העגלה (ראה איור 7). כתוצאה מכך הכדור נע במסלול שהוא זריקה בזווית כלפי מעלה.



איור 7: הדגמה המראה שהרכיב האופקי של המהירות בזריקה בזווית אינו משתנה אלא נשאר קבוע.

מכיוון שבכיוון ציר x מהירות הכדור קבועה ושווה למהירות העגלה, v_0, העתקי הכדור בכיוון ציר x בפרקי זמן שווים הם זהים ושווים להעתקים של העגלה בפרקי זמן אלה. לכן הכדור נשאר כל זמן תנועתו מעל לעגלה, וכשהוא חוזר למישור ממנו נזרק הוא נופל בתוך הסל (ראה איור 7).

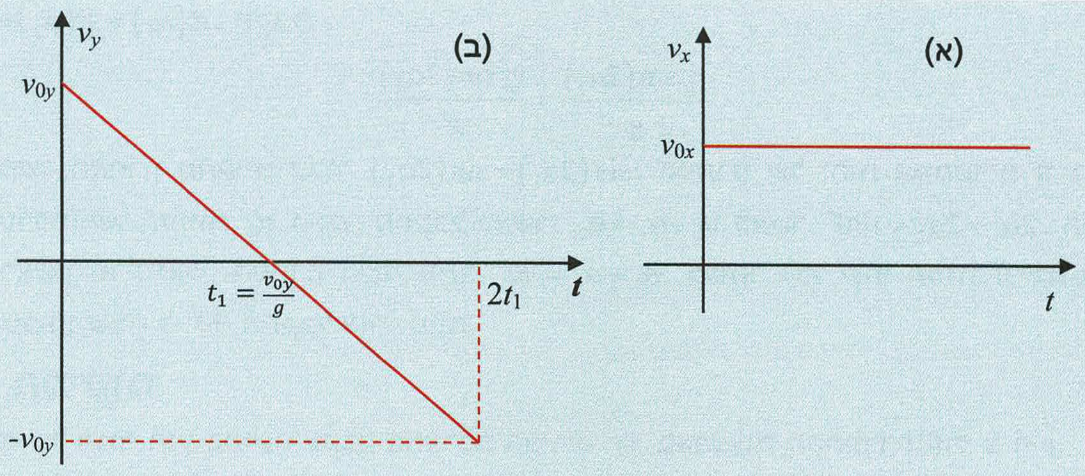
בכיוון ציר y מתקיים $a_y=-g$, לכן רכיב המהירות בכיוון ציר y אינו קבוע. הוא משתנה עם הזמן על פי הקשר הבא:

$$v_y(t)=v_{0y}+a_yt=v_{0y}-gt \qquad (29)$$

הגרפים המתוארים באיור 8 מתארים את v_x ואת v_y כפונקציה של הזמן. v_x מתואר בגרף 8א ו-v_y מתואר באיור 8ב. בחלק הראשון של הגרף, באיור 8ב, v_y חיובי והתאוצה שלילית. זהו שלב עליית הגוף. בחלק השני של הגרף v_y שלילית וגם התאוצה שלילית. זהו שלב הירידה. נקודת חיתוך הגרף עם ציר הזמן היא הרגע שבו v_y מתאפס. בזמן זה הגוף מגיע לגובה המקסימלי. ניתן לבטא זמן זה על ידי הצבת $v_y=0$ בקשר (29). אם נסמן זמן זה ב-t_1 נקבל: $0=v_{0y}-gt_1$, מכאן נקבל:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} \qquad (30)$$

הגוף חוזר למישור ממנו נזרק בזמן השווה ל- $2t_1$ ובמהירות השווה ל- $-v_{0y}$.



איור 8: (א) הרכיב v_x כפונקציה של הזמן בזריקה בזווית. (ב) הרכיב v_y כפונקציה של הזמן בזריקה בזווית.

בעזרת הגרף המתואר באיור 8ב, ניתן לבטא את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף. השטח הכלוא בין הגרף לציר הזמן עד t_1 מבטא את העתק הגוף עד לגובה המקסימלי. מכיוון שבחרנו ש- $y_0 = 0$, נקבל שהעתק זה שווה ל- $y_{\max}$. על פי הגרף נקבל:

$$y_{\max} = \frac{v_{0y} t_1}{2} = \frac{v_{0y}}{2}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right) = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g} \qquad (31)$$

הגדרה:

הטווח הוא ההעתק האופקי של הגוף עד לרגע חזרתו למישור ממנו נזרק.

הטווח מסומן באות R מהמילה Range. ניתן לבטא את הטווח על ידי הקשר $\Delta x = v_x t$, כאשר $v_x = v_0 \cos\alpha_0$ ו- t הוא הזמן עד לחזרה למישור ממנו הגוף נזרק. זמן זה נתון על ידי: $t = 2t_1 = 2\left(v_{0y}/g\right)$ (ראה משוואה (30)). מכאן נקבל:

$$R = \left(v_0 \cos\alpha_0\right)\left(2\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}\right) = \frac{v_0^2\left(2\sin\alpha_0 \cos\alpha_0\right)}{g} \qquad (32)$$

ניעזר בזהות הטריגונומטרית: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\left(2\alpha\right)$ ונקבל:

$$R = \frac{v_0^2 \sin\left(2\alpha_0\right)}{g} \qquad (33)$$

הערות:

1. על פי הביטוי (33), אם זורקים גוף באותה מהירות התחלתית v_0 אבל בזוויות שונות, הטווח המקסימלי $\left(R_{\max}\right)$ מתקבל עבור הזווית α_0 שעבורה יש לגודל $\sin\left(2\alpha_0\right)$ ערך מקסימלי. הערך המקסימלי עבור $\sin\left(2\alpha_0\right)$ הוא 1, והוא מתקבל בתחום ההגדרה של α_0 שהוא $\left(0 \le \alpha_0 \le 90^\circ\right)$ כאשר $2\alpha_0 = 90^\circ$. מכאן שהטווח המקסימלי מתקבל עבור $\alpha_0 = 45^\circ$. אם נציב $\alpha_0 = 45^\circ$ בקשר (33) נקבל:

$$R_{\max} = v_0^2 / g \qquad (34)$$

2. אם זווית הזריקה α_0 קטנה או גדולה מ- 45° נקבל שהטווח קטן מ- $R_{\max}$. מכאן ניתן להגיע למסקנה, שלכל $R<R_{\max}$ קיימות שתי זוויות שונות, אחת α_1 קטנה מ- 45° והשנייה α_2 גדולה מ- 45° שעבורן מתקבל אותו טווח. למציאת הקשר בין הזווית α_1 ו- α_2 ניעזר בקשר (33) ובכך ש- $R(\alpha_1)=R(\alpha_2)$, ונקבל:

$$\frac{v_0^2\sin(2\alpha_1)}{g}=\frac{v_0^2\sin(2\alpha_2)}{g}$$

הקשר האחרון מתקיים עבור $\sin(2\alpha_1)=\sin(2\alpha_2)$. הפתרון של זהות גאומטרית זו בתחום הערכים של הזוויות α_1 ו- α_2, מתקבל כאשר: $\alpha_1=\alpha_2$, או כאשר $2\alpha_1+2\alpha_2=180^\circ$. הפתרון הראשון טריוויאלי, הפתרון השני נותן: $\alpha_1+\alpha_2=90^\circ$. כלומר לכל שתי זוויות זריקה שונות שסכומן שווה ל- 90° מתקבל אותו טווח.

2.3 המיקום

מיקומו של הגוף הנע במישור נקבע במערכת הצירים xy באמצעות הקואורדינטות x ו- y, או על ידי וקטור המיקום $\vec{r}$. במקרה של זריקה על פני כדור הארץ יותר קל לקבוע את מיקומו של הגוף באמצעות הקואורדינטות x ו- y.

מאחר שבכיוון ציר x מהירות הגוף קבועה $(v_0\cos\alpha_0)$, ומכיוון ש- $x_0=0$, נקבל מהקשר: $x=x_0+v_xt$ את הביטוי הבא עבור הקואורדינטה x בזריקה בזווית:

$$x=v_{0x}t=(v_0\cos\alpha_0)t \qquad (35)$$

בכיוון ציר y התנועה היא תנועה בתאוצה קבועה, שבמקרה זה היא תאוצת הכובד; $a_y=-g$. על פי הקשר: $y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2$ נקבל עבור המיקום בתנועה בקו ישר בתאוצה קבועה:

$$y=(v_0\sin\alpha_0)t-\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (36)$$

כאשר הצבנו $y_0=0$, $v_{0y}=v_0\sin\alpha_0$ ו- $a_y=-g$.

על פי הקשרים (35) ו-(36) ניתן לחשב בכל רגע נתון את מיקומו של הגוף הנזרק בזווית.

2.4 משוואת המסלול בזריקה בזווית

משוואת המסלול בזריקה בזווית היא הקשר המבטא את הקואורדינטה y כפונקציה של הקואורדינטה x, $y(x)$. זוהי משוואה המתארת את כל הנקודות (x,y) במישור xy שבהן הגוף עובר במהלך תנועתו, נקודות המהוות את מסלול הגוף, ועל כן משוואה זו נקראת משוואת המסלול.

על מנת למצוא את משוואת המסלול בזריקה בזווית עלינו לבטא את y כפונקציה של x. לשם כך נחלץ את t ממשוואה (35):

$$t=x/(v_0\cos\alpha_0) \qquad (37)$$

נציב במשוואה (36) ונקבל:

$$y(x)=(v_0\sin\alpha_0)\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha_0}\right)-\tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha_0}\right)^2$$

מקשר זה נקבל:

$$y(x)=(\tan\alpha_0)x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2 \qquad (38)$$

זוהי פונקציה ריבועית מהצורה: $y=Bx+Ax^2$, שהגרף שלה הוא פרבולה. כלומר מסלולו של גוף

הנזרק בזווית על פני כדור הארץ, בהעדר כוח החיכוך עם האוויר, הוא פרבולה.

דוגמאות בזריקה בזווית

דוגמה 1

ברגע $t=0$ נזרק מהקרקע גוף בזריקה משופעת. בחר מערכת צירים xy הנמצאת במישור בו נע הגוף, כך שציר x מקביל לפני הקרקע, ציר y ניצב לו וראשית הצירים נמצאת בנקודה ממנה נזרק הגוף. במערכת צירים זו נתון ש-$v_{0x}=20\,\mathrm{m/s}$ ו-$v_{0y}=30\,\mathrm{m/s}$.

א. בטא את רכיבי המהירות v_x ו-v_y, ואת הקואורדינטות x ו-y של הגוף, במהלך תנועתו, כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע לגובה המקסימלי וחשב גובה זה.

ג. חשב את הזמן שבו הגוף חוזר למישור האופקי ממנו נזרק, ואת העתקו בכיוון ציר x עד לזמן זה (הטווח שלו).

ד. מצא את מיקום הגוף בזמנים: $t=1,2,3,4,5\,\mathrm{s}$.

ה. מצא את וקטורי המיקום בזמנים שבסעיף הקודם.

ו. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרקי הזמן $2-4\,\mathrm{s}$ ו-$0-3\,\mathrm{s}$.

ז. חשב את מהירות הגוף (גודל וכיוון) בזמנים שבסעיף ד'.

פתרון:

א. רכיבי המהירות הם:

$$v_x=20$$
$$v_y=30-10t$$

קואורדינטות המיקום:

$$x=20t$$
$$y=30t-5t^2$$

ב. הגוף מגיע לגובה המקסימלי בזמן שבו רכיב המהירות v_y מתאפס:

$$30-10t=0\ \Rightarrow t=3\,\mathrm{s}$$

את הגובה המקסימלי ניתן למצוא על ידי הצבת $t=3\,\mathrm{s}$ בקשר עבור y:

$$y=30(3)-5(3)^2=45\,\mathrm{m}$$

ג. הגוף חוזר למישור האופקי ממנו נזרק כאשר מתקיים $y=0$:

$$y=30t-5t^2=0$$
$$\Rightarrow t(30-5t)=0$$
$$\Rightarrow t_1=0,\quad t_2=6\,\mathrm{s}$$

הפתרון המתאים הוא הפתרון השני $(t=6\,\mathrm{s})$.

העתק הגוף עד ל-$t=6\,\mathrm{s}$ מתקבל מהצבת זמן זה בקשר עבור x:

$$x=20(6)=120\,\mathrm{m}$$

ד. נציב את הזמנים בקשרים עבור x ו-y שבסעיף א, ונקבל את הטבלה הבאה:

$t(\mathrm{s})$	$x(\mathrm{m})$	$y(\mathrm{m})$
1	20	25
2	40	40
3	60	45
4	80	40
5	100	25

ה. גודלו של וקטור המיקום נתון על ידי הקשר: $r=\sqrt{x^2+y^2}$, וכיוונו על ידי הקשר: $\tan\alpha=y/x$. בעזרת קשרים אלה והטבלה שבסעיף הקודם נקבל את הטבלה הבאה:

$t(\mathrm{s})$	$r(\mathrm{m})$	α מעלות
1	32.02	51.34
2	56.57	45.00
3	75.00	36.87
4	89.44	26.57
5	103.07	14.04

ו. ניעזר בקשרים הבאים עבור רכיבי המהירות הממוצעת בכיווני הצירים x ו-y:

$$\overline{v}_x=\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad \overline{v}_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

בפרק הזמן $2-4s$ נקבל על פי הטבלה שבסעיף ד:

$$\overline{v}_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(4)-x(2)}{4-2}=\frac{80-40}{2}=20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\overline{v}_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y(4)-y(2)}{4-2}=\frac{40-40}{2}=0$$

לכן המהירות הממוצעת בפרק זמן זה היא $20\,\mathrm{m/s}$ בכיוון אופקי.

בפרק הזמן $0-3\,\mathrm{s}$ נקבל:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(3)-x(0)}{3-0} = \frac{60-0}{3} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(3)-y(0)}{3-0} = \frac{45-0}{3} = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

מכאן נקבל:

$$\bar{v} = \sqrt{20^2+15^2} = 25\,\text{m/s}$$

$$\tan\alpha = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \alpha = 36.87^\circ$$

ז. על פי המשוואות:

$$v_x = 20$$

$$v_y = 30-10t$$

נקבל את הטבלה הבאה עבור רכיבי המהירות בזמנים הנתונים:

$t(\text{s})$	$v_x(\text{m/s})$	$v_y(\text{m/s})$
1	20	20
2	20	10
3	20	0
4	20	-10
5	20	-20

על פי הטבלה הקודמת ובעזרת הקשרים:

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} \qquad \tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

נקבל את הטבלה הבאה עבור גודל וכיוון המהירות בזמנים הנתונים:

$t(\text{s})$	$v(\text{m/s})$	**מעלות** α
1	28.28	45.00
2	22.36	26.57
3	20.00	00.00
4	22.36	-26.57
5	28.28	-45.00

דוגמה 2

גוף נזרק בזמן $t=0$ מגגו של בניין שגובהו 50m. הגוף נזרק במהירות התחלתית של $30\,\text{m/s}$ ובזווית בת 30° כלפי מעלה, כפי שמתואר בתרשים שלפניך.

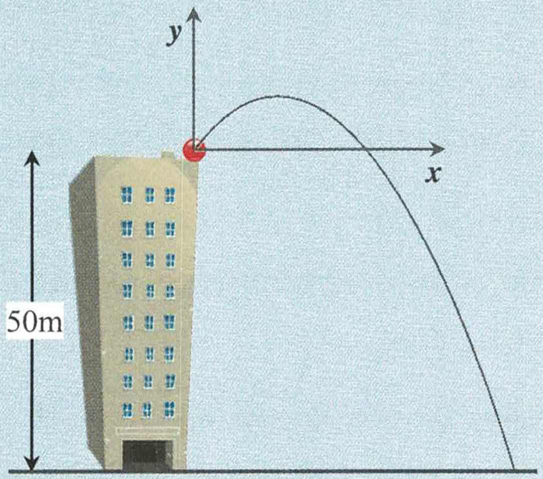
בוחרים מערכת צירים xy במישור תנועת הגוף כך שציר x אופקי, ציר y אנכי כלפי מעלה וראשית הצירים בנקודה ממנה נזרק הגוף (ראה תרשים).

א. בטא את רכיבי המהירות v_x ו-v_y ואת קואורדינטות המיקום x ו-y של הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע לגובה המקסימלי ביחס לגג הבניין, וחשב גובה זה.

ג. חשב את הזמן שבו הגוף פוגע בקרקע וחשב מיקום נקודה זו.

ד. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.



פתרון:

א. למהירות ההתחלתית יש במערכת הצירים xy הנתונה שני הרכיבים:

$$v_{0x} = 30\cos 30 = 26\,\text{m/s}$$

$$v_{0y} = 30\sin 30 = 15\,\text{m/s}$$

רכיבי המהירות כפונקציה של הזמן נתונים על ידי:

$$v_x = 26$$

$$v_y = 15-10t$$

עבור קואורדינטות המיקום נקבל:

$$x = v_{0x}t = 26t$$

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 15t-5t^2$$

ב. הגוף מגיע לגובה המקסימלי כאשר v_y מתאפס:

$$v_y = 15-10t = 0 \quad \Rightarrow t = 1.5\text{s}$$

לחישוב $y_{\max}$ נציב $t=1.5\text{s}$ במשוואה עבור y:

$$y = 15(1.5)-5(1.5)^2 = 11.25\text{m}$$

ג. הגוף מגיע לקרקע כאשר מתקיים $y=-50\text{m}$. נציב $y=-50$ במשוואה עבור y ונקבל:

$$-50 = 15t-5t^2$$

$$\Rightarrow 5t^2-15t-50 = 0$$

$$\Rightarrow t^2-3t-10 = 0$$

$$\Rightarrow (t+2)(t-5)=0$$

$$\Rightarrow t_1=-2\,\mathrm{s},\quad t_2=5\,\mathrm{s}$$

בוחרים כמובן בזמן החיובי, t_2, לכן נקבל שהגוף מגיע לקרקע ב- $t=5\,\mathrm{s}$. בזמן זה מתקיים:

$$x=26(5)=130\,\mathrm{m}$$

מכאן שהגוף פוגע בקרקע בנקודה: $(130\,\mathrm{m},-50\,\mathrm{m})$.

ד. בזמן $t=5\,\mathrm{s}$ רכיבי המהירות הם:

$$v_x=26\,\mathrm{m/s}$$

$$v_y=15-10(5)=-35\,\mathrm{m/s}$$

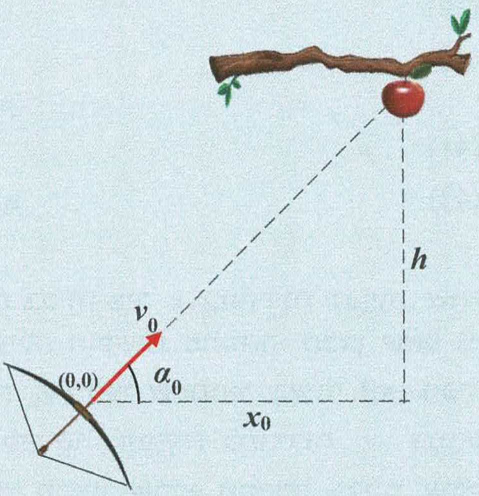
המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע:

$$v(5\,\mathrm{s})=\sqrt{26^2+35^2}=43.6\,\mathrm{m/s}$$

$$\tan\alpha=\frac{-35}{26}=\quad\Rightarrow\alpha=-53.4^{\circ}$$

דוגמה 3

אדם מכוון חץ הנמצא בקשת מתוחה, לכוון תפוח הנמצא על עץ כפי שמתואר באיור הבא.



החץ נורה בזמן $t=0$, בדיוק ברגע בו התפוח החל ליפול נפילה חופשית ממנוחה.

נתון שהמהירות שבה נורה החץ היא v_0, שהזווית שהמהירות ההתחלתית יוצרת עם האופק היא α_0, שגובה התפוח מעל הקרקע ב-$t=0$ הוא h ושמרחקו האופקי מהחץ הוא x_0 (ראה תרשים).

בחר ציר x אופקי, ציר y אנכי וראשית הצירים בנקודה ממנה נורה החץ וענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא את הקואורדינטה y של החץ כפונקציה של הזמן באמצעות הפרמטרים α_0 ו- v_0. סמן קואורדינטה זו ב- y_1.

ב. בטא את הקואורדינטה y של התפוח כפונקציה של הזמן באמצעות הפרמטר h. סמן קואורדינטה זו ב- y_2.

ג. מצא את הזמן שבו החץ חותך את מסלול התפוח. בטא את תשובתך באמצעות הפרמטרים x_0, v_0 ו- α_0. סמן זמן זה ב- t'.

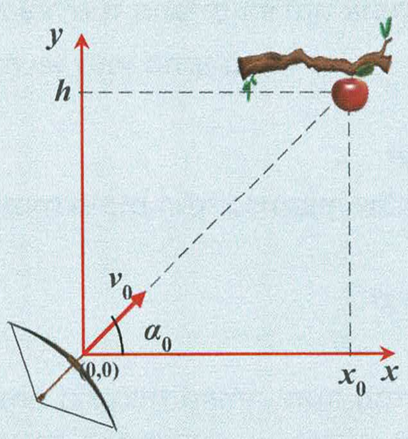
ד. הראה שמתקיים ש: $y_2(t')=y_1(t')$.

ה. מהי המסקנה המתקבלת מסעיף ד?

פתרון:

א. במערכת הצירים הנתונה והמתוארת בתרשים הבא, הקואורדינטה y_1 של החץ כפונקציה של הזמן נתונה על ידי:

$$y_1=(v_0\sin\alpha_0)t-\tfrac{1}{2}gt^2$$



ב. הקואורדינטה y_2 של התפוח כפונקציה של הזמן נתונה על ידי:

$$y_2=y_{02}+(v_{02})t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

מתקיים: $y_{02}=h$ ו- $v_{02}=0$. נציב ונקבל:

$$y_2=h-\tfrac{1}{2}gt^2$$

ג. $t'=\dfrac{x_0}{v_x}=\dfrac{x_0}{v_0\cos\alpha_0}$

ד. עבור התפוח מתקיים:

$$y_2(t')=h-\tfrac{1}{2}gt'^2$$

ועבור החץ:

$$y_1(t')=(v_0\sin\alpha_0)t'-\tfrac{1}{2}gt'^2=$$

$$=(v_0\sin\alpha_0)\left(\frac{x_0}{v_0\cos\alpha_0}\right)-\tfrac{1}{2}gt'^2=$$

$$= x_0 \tan\alpha_0 - \tfrac{1}{2}gt'^2$$

על פי התרשים שבסעיף א' מתקיים:

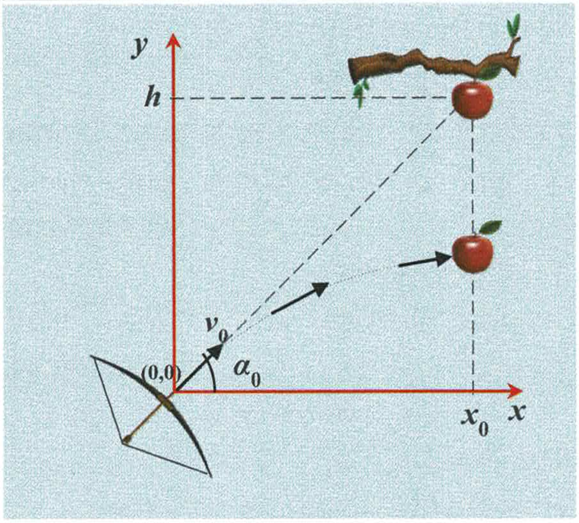
$$x_0 \tan\alpha_0 = h$$

מקשר זה נקבל:

$$y_1(t') = h - \tfrac{1}{2}gt'^2$$

ולכן: $y_2(t') = y_1(t')$.

ה. המסקנה המתקבלת מהסעיף הקודם היא שלמרות שהתפוח החל ליפול ברגע שהחץ נורה לכיוונו, החץ אכן פוגע בתפוח כפי שמתואר בתרשים הבא:



3. זריקה אופקית

הזריקה האופקית היא מקרה פרטי של זריקה משופעת. בזריקה האופקית מתקיים $\alpha_0 = 0$, כלומר הגוף נזרק במהירות התחלתית v_0 במקביל לאופק.

לניתוח בעיה זו נבחר את אותה מערכת צירים כמו קודם: ציר x מקביל לאופק וכיוונו החיובי בכיוון המהירות ההתחלתית, וציר y ניצב לאופק וכיוונו החיובי כלפי מעלה.

במערכת צירים זו מתקיים בזריקה אופקית: $a_x = 0$, $a_y = -g$, $v_{0x} = v_0$ ו- $v_{0y} = 0$. עבור המהירות כפונקציה של הזמן מתקיים:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \tag{39}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = -gt \tag{40}$$

קואורדינטות מיקום הגוף כפונקציה של הזמן נתונות על ידי:

$$x = v_0 t \tag{41}$$

$$y = v_{0_y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = -\tfrac{1}{2}gt^2 \tag{42}$$

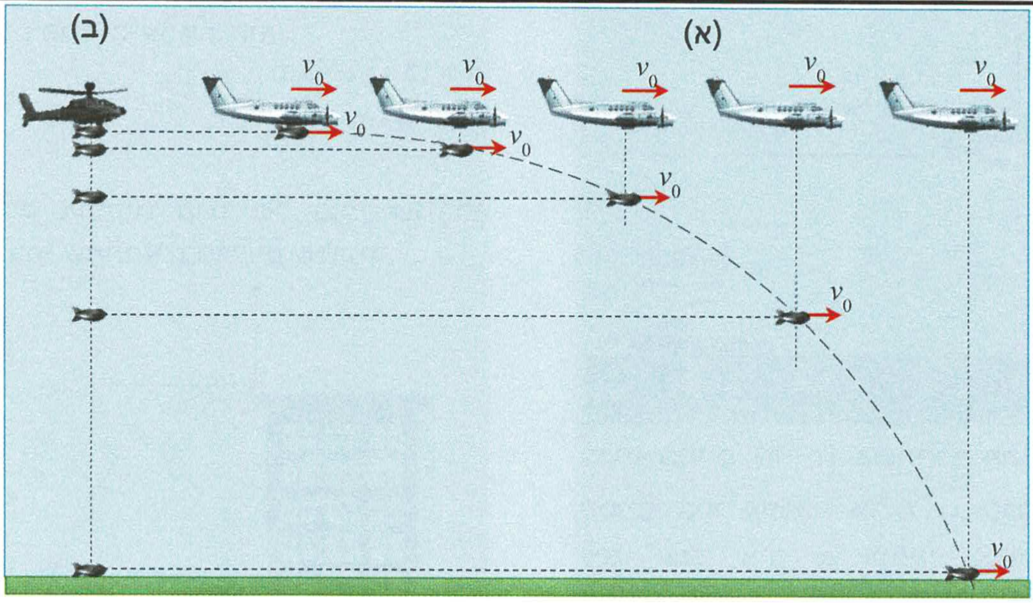
הערות:

1. בהזנחת התנגדות האוויר, הגוף הנזרק אופקית מתקדם בכיוון ציר x במהירות קבועה, שהיא המהירות ההתחלתית v_0, ובכיוון אנכי הגוף נופל נפילה חופשית ממנוחה. מכאן שאם גוף משוחרר ממטוס הטס בכיוון אופקי במהירות קבועה v_0, כפי שמתואר באיור 9א, מכיוון שהגוף מקבל את מהירות המטוס, תנועתו נחשבת לזריקה אופקית במהירות v_0. במהלך תנועתו הגוף נופל כשהמטוס מעליו בכל רגע, וזאת מכיוון שהוא מתקדם בכיוון אופקי במהירות הזהה למהירות המטוס (ראה איור 9א), וזאת כמובן בהזנחת החיכוך עם האוויר.

   מכיוון שבכיוון אנכי המהירות ההתחלתית של הגוף שווה לאפס, הגוף נופל בכיוון זה נפילה חופשית ממנוחה. לכן אם באותו זמן שבו הגוף משתחרר מהמטוס שבאיור 9א, גוף אחר משוחרר מנוחה מאותו גובה (כפי שמתואר באיור 9ב), העתקי שני הגופים בכיוון אנכי יהיו זהים וגם זמני הנפילה יהיו זהים, ולכן שני הגופים יגיעו לקרקע באותו זמן (ראה איורים 9א ו- 9ב).

2. על מנת למצוא את משוואת המסלול עבור גוף הנזרק זריקה אופקית, נחלץ את t ממשוואה (41) ונציבו במשוואה (42). ממשוואה (41) נקבל $t = x_0 / v$. מהצבה במשוואה (42) מתקבלת משוואת המסלול:

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 \tag{43}$$

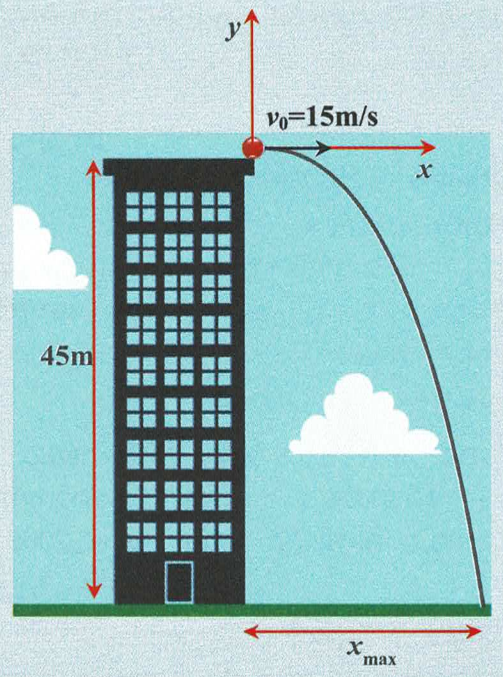


איור 9: (א) גוף המשוחרר ממנוחה ביחס למטוס הנע (יחסית לקרקע) במהירות קבועה בכיוון אופקי. (ב) גוף המשוחרר ממנוחה ממסוק הנמצא במנוחה ביחס לקרקע.

דוגמאות בזריקה אופקית

דוגמה 1

גוף נזרק ברגע $t=0$ בכיוון אופקי מגגו של בניין שגובהו $45\,\text{m}$ במהירות התחלתית שגודלה $15\,\text{m/s}$, כפי שמתואר בתרשים שלפניך.



א. בטא את קואורדינטות מיקום הגוף כפונקציה של הזמן במערכת הצירים המתוארת בתרשים.

ב. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע לקרקע.

ג. חשב את המהירות (גודל וכיוון) שבה הגוף פוגע בקרקע.

ד. מצא את קואורדינטות הנקודה שבה הגוף פוגע בקרקע.

פתרון:

א. מתקיים: $x=15t$ ו- $y=-5t^2$.

ב. הגוף מגיע לקרקע כאשר מתקיים $y=-45\,\text{m}$. נציב במשוואה עבור y שבסעיף א' ונקבל:

$$-45=-5t^2$$

$$\Rightarrow t=\pm\sqrt{9}=\pm3\,\text{s}$$

נבחר כמובן בפתרון החיובי.

ג. רכיבי מהירות הגוף במערכת הצירים הנתונה הם:

$$v_x=15$$

$$v_y=-10t$$

ב- $t=3\,\text{s}$ נקבל:

$$v_x=15\,\text{m/s}$$

$$v_y=-10\cdot3=-30\,\text{m/s}$$

גודל מהירות הגוף ב- $t=3\,\text{s}$ הוא:

$$v(3)=\sqrt{(-30)^2+(15)^2}=33.54\,\text{m/s}$$

וכיוון מהירות זו הוא:

$$\tan\alpha=\frac{-30}{15}=-2\ \Rightarrow\alpha=-63.43^\circ$$

הזווית שלילית כיוון שכיוון המהירות הוא מתחת לציר x.

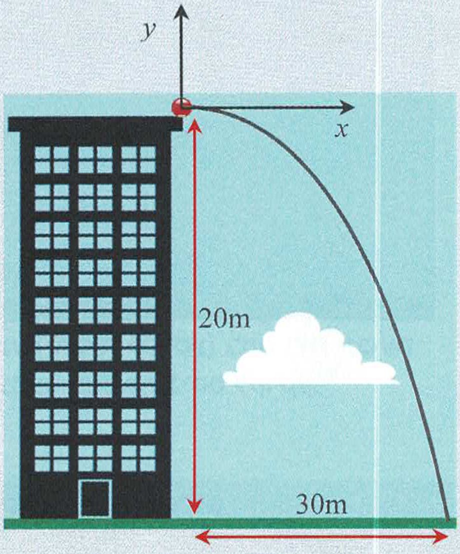
ד. מיקום הגוף ב- $t=3\,\text{s}$ הוא:

$x=15\times3=45\,\text{m}$

$y=-45\,\text{m}$

דוגמה 2

גוף נזרק אופקית מגגו של בניין שגובהו $20\,\text{m}$, כפי שמתואר בתרשים שלפניך.



מה צריך להיות גודל מהירותו ההתחלתית על מנת שהגוף יפגע בעצם הנמצא על הקרקע במרחק $30\,\text{m}$ מתחתית הבניין והנמצא במישור תנועת הגוף (ראה תרשים).

פתרון:

במערכת הצירים המתוארת בתרשים מתקיים:

$x=v_0t,$

$y=-5t^2$

כאשר v_0 היא המהירות האופקית ההתחלתית.

נחשב קודם את הזמן הדרוש לגוף להגיע לקרקע, וזאת על ידי הצבת $y=-20\,\text{m}$ במשוואה עבור y:

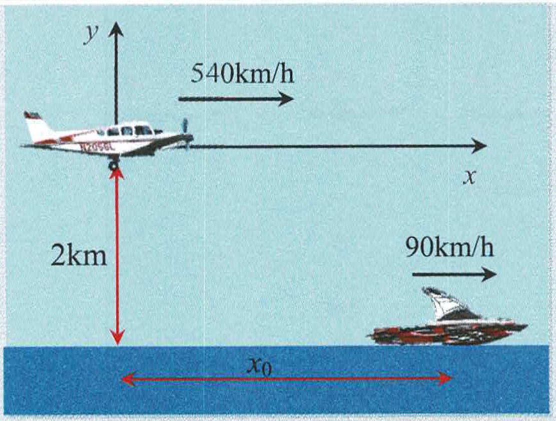
$-20=-5t^2 \quad \Rightarrow t=2\,\text{s}$

על מנת שהגוף יפגע בעצם, צריך להתקיים $x(2\,\text{s})=30\,\text{m}$. מכיוון ש- $x=v_0t$, נקבל:

$30=v_0(2) \quad \Rightarrow v_0=15\,\text{m/s}$

דוגמה 3

מטוס טס בכיוון אופקי בגובה $2{,}000\,\text{m}$ מעל הים ובמהירות קבועה של $540\,\text{km/h}$. מתחתיו ולאורך קו תנועתו נעה סירת מנוע במהירות של $90\,\text{km/h}$ (ראה תרשים).



ברגע מסוים $(t=0)$ משתחרר מהמטוס גוף מסוים. בחר מערכת צירים xy קבועה ביחס לים, שבה ציר x אופקי בכיוון תנועת המטוס, ציר y אנכי שכיוונו החיובי כלפי מעלה וראשית הצירים מיקום הגוף ב-$t=0$ (ראה תרשים). הזנח את התנגדות האוויר.

א. בטא את קואורדינטות מיקום הגוף כפונקציה של הזמן. העזר במערכת הצירים המתוארת בפתיח השאלה.

ב. מצא את הזמן שבו הגוף מגיע לפני הים.

ג. חשב מה צריך להיות המרחק האופקי (x_0) בין המטוס לסירה ברגע שבו הגוף משתחרר מהמטוס על מנת שהוא ייפול על הסירה.

פתרון:

א. מתקיים:

$540\,\text{km/h}=150\,\text{m/s}$

$90\,\text{km/h}=25\,\text{m/s}$

נסמן את הגוף ב-1 ואת הסירה ב-2. מתקיים:

$x_1=v_0t=150t$

$y_1=-5t^2$

ב. כאשר הגוף מגיע לפני הים, מתקיים (במערכת הצירים שנבחרה) ש- $y_1=-2000\,\text{m}$. נציב במשוואה עבור y_1 ונקבל:

$-2000=-5t^2 \quad \Rightarrow t=20\,\text{s}$

ג. מיקום הסירה במערכת הצירים שנבחרה בשאלה זו (החל מ-$t=0$) נתון על ידי:

$x_2=x_0+25t$

כאשר x_0 הוא המרחק האופקי בין המטוס לסירה ב-$t=0$.

על מנת שהגוף ייפול על הסירה ברגע הגעתו לפני הים, צריך להתקיים:

$$x_2(20\,\text{s})=x_1(20\,\text{s})$$

מתנאי זה נקבל:

$$x_0+25(20)=150(20)$$
$$\Rightarrow x_0=2{,}500\,\text{m}=2.5\,\text{km}$$

4. זריקה בזווית כלפי מטה

כאשר גוף נזרק בזווית מתחת לאופק, כלומר כלפי מטה, זווית הזריקה במערכת הצירים שבה ציר x אופקי וציר y אנכי כלפי מעלה, נחשבת לשלילית $(\alpha_0<0)$. במקרה זה יש למהירות ההתחלתית שני רכיבים: $v_{0x}=v_0\cos\alpha_0$ ו- $v_{0y}=v_0\sin\alpha_0$ (שים לב, מכיוון ש- $\alpha_0<0$ נקבל $v_{0y}<0$. לעומת זאת $v_{0x}>0$).

במקרה כזה, רכיבי מהירות הגוף כפונקציה של הזמן נתונים על ידי:

$$v_x=v_0\cos\alpha_0 \qquad (44)$$

$$v_y=v_0\sin\alpha_0-gt \qquad (45)$$

מכיוון ש- $v_0\sin\alpha_0<0$ נקבל ש- v_y שלילי במהלך כל התנועה.

קואורדינטות מיקום הגוף כפונקציה של הזמן במערכת הצירים שבחרנו נתונות על ידי:

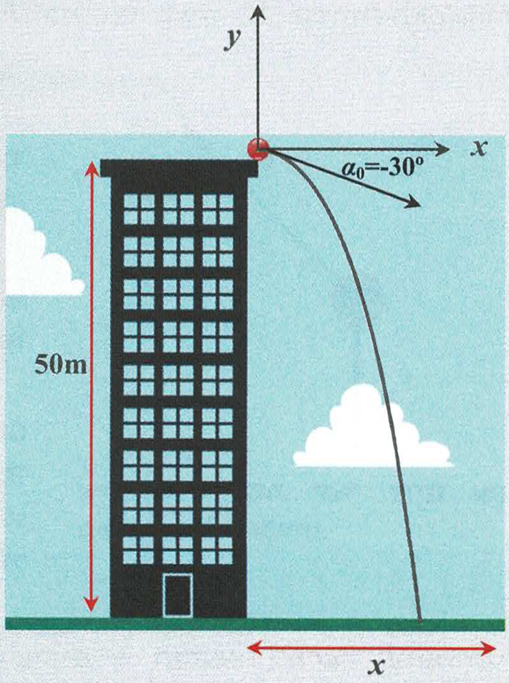
$$x=(v_0\cos\alpha_0)t \qquad (46)$$

$$y=(v_0\sin\alpha_0)t-\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (47)$$

דוגמאות בזריקה בזווית כלפי מטה

דוגמה 1

גוף נזרק ברגע $t=0$ מגג של בניין שגובהו $50\,\text{m}$ במהירות התחלתית של $30\,\text{m/s}$ ובזווית בת 30° מתחת לאופק, כפי שמתואר בתרשים שלפניך.



א. העזר במערכת הצירים המתוארת בתרשים ובטא את קואורדינטות המיקום של הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. מצא את הזמן שבו הגוף מגיע לקרקע.

ג. מצא את קואורדינטות נקודת פגיעת הגוף בקרקע.

ד. חשב את גודל וכיוון המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

פתרון:

נחשב קודם את רכיבי המהירות ההתחלתית של הגוף במערכת הצירים xy:

$$v_{0x}=30\cos(-30)=26\,\text{m/s}$$
$$v_{0y}=30\sin(-30)=-15\,\text{m/s}$$

מתקיים:

$$x=26t$$
$$y=-15t-5t^2$$

ב. כאשר הגוף מגיע לקרקע מתקיים ש- $y=-50\,\text{m}$. נציב גודל זה במשוואה עבור y מהסעיף הקודם ונקבל:

$$-50=-15t-5t^2$$
$$\Rightarrow t^2+3-10=0$$
$$\Rightarrow (t+5)(t-2)=0$$

מקבלים שני פתרונות: $t_1=-5\,\text{s}$ ו- $t_2=2\,\text{s}$.

נבחר בפתרון החיובי.

ג.

$$x(2\,\text{s})=26(2)=52\,\text{m}$$

$y(2\,\mathrm{s}) = -50\,\mathrm{m}$

ד.

$v_x = 26\,\mathrm{m/s}$

$v_y = v_{0y} - 10t = -15 - 10(2) = -35\,\mathrm{m/s}$

המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע היא:

$v = \sqrt{35^2 + 26^2} = 43.6\,\mathrm{m/s}$

$\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{-35}{26} \quad \Rightarrow \alpha = -53.4^{\circ}$

דוגמה 2

גוף נזרק ברגע $t = 0$ מבניין גבוה מאוד במהירות התחלתית של $30\,\mathrm{m/s}$ ובזווית בת 40° מתחת לאופק.

בחר ציר x אופקי וציר y אנכי, שכיוונו החיובי כלפי מעלה, ואת ראשית הצירים בנקודה ממנה נזרק הגוף.

א. מצא את הזמן שבו $x = 69\,\mathrm{m}$.

ב. מצא את הזמן שבו $y = -30\,\mathrm{m}$.

ג. מצא את הזמן שבו $v_y = 60\,\mathrm{m/s}$ (כמובן, כלפי מטה).

פתרון:

א. במערכת הצירים שבפתיח השאלה מתקיים:

$x = (30\cos 40)t = 23t$

$y = 30\sin(-40)t - 5t^2 = -19.3t - 5t^2$

הגוף מגיע ל- $x = 69\,\mathrm{m}$ כאשר מתקיים:

$23t = 69 \quad \Rightarrow t = 3\,\mathrm{s}$

ב. $y = -30\,\mathrm{m}$ כאשר:

$-19.3t - 5t^2 = -30$

$\Rightarrow t^2 + 3.86t - 6 = 0 \quad \Rightarrow t = 1.19\,\mathrm{s}$

ג. $v_y = -60\,\mathrm{m/s}$ כאשר:

$v_y = -19.3 - 10t = -60$

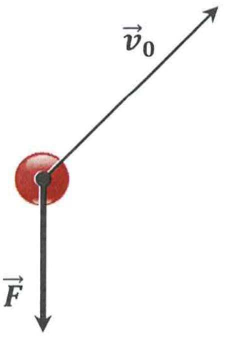
$\Rightarrow t = 4.07\,\mathrm{s}$

5. תנועת גוף בהשפעת כוח קבוע (בשדה כוח קבוע)

בהזנחת החיכוך עם האוויר, גוף הנזרק על פני כדור הארץ נע בהשפעת כוח קבוע (גודל וכיוון), שהוא כוח הכובד. מכיוון שכוח זה פועל על הגוף בכל נקודות המרחב, מתארים אותו באמצעות המונח "**שדה של כוח**". התוצאות שקיבלנו עבור תנועת הגוף בשדה כוח הכבידה, תקפות גם לתנועת הגוף בכל שדה כוח אחר, אם הכוח הוא קבוע.

אם גוף מקבל מהירות התחלתית $\vec{v}_0$ בשדה כוח קבוע $\vec{F}$, כמתואר באיור 10, קיימות האפשרויות הבאות לתנועתו:

1. אם כיוון המהירות ההתחלתית מנוגד לכיוון הכוח $\vec{F}$, הגוף נע בקו ישר ומאט את מהירותו בקצב קבוע עד לעצירה רגעית, ולאחר מכן הוא חוזר בתאוצה קבועה, כמו בזריקה אנכית כלפי מעלה בשדה הכובד.
2. אם כיוון המהירות ההתחלתית בכיוון הכוח $\vec{F}$, הגוף נע בקו ישר ובתאוצה קבועה בכיוון הכוח, כמו בזריקה אנכית כלפי מטה בשדה הכובד.
3. אם המהירות ההתחלתית יוצרת זווית כל שהיא עם כיוון הכוח כפי שמתואר באיור 10, נקבל תנועה כמו בזריקה בזווית בשדה הכובד. במקרה זה הגוף נע במישור המכיל את שני הווקטורים $\vec{v}_0$ ו- $\vec{F}$ במסלול שהוא פרבולה.



איור 10: הכוח יוצר זווית עם המהירות ההתחלתית.

על מנת לנתח את המקרה הכללי האחרון נבחר מערכת צירים xy הנמצאת במישור תנועת הגוף, שבה ציר y מנוגד לכיוון הכוח $\vec{F}$, ציר x ניצב לו וראשית הצירים מיקום הגוף ב- $t = 0$, כפי שמתואר באיור 11. במערכת זו מתקיים:

$$a_x = 0 \qquad (48)$$

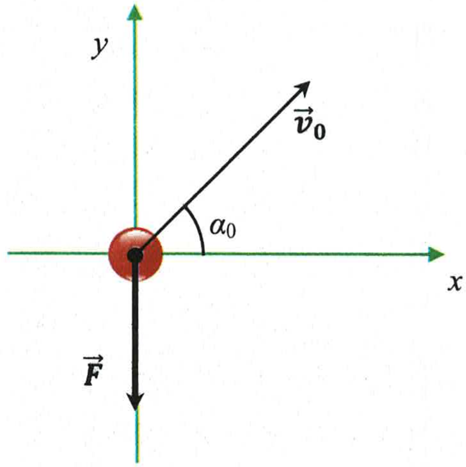
$$a_y = \frac{F}{m} \qquad (49)$$

כאשר m היא מסת הגוף ו- F הוא הכוח (שים לב שגודל זה הוא שלילי במערכת הצירים שבחרנו).

אם נסמן את הזווית בין המהירות לציר x ב- α_0, נקבל שלמהירות ההתחלתית במערכת זו יש שני רכיבים: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$ ו- $v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0$. רכיבי המהירות כפונקציה של הזמן נתונים על ידי:

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \qquad (50)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin\alpha_0 + \left(\frac{F}{m}\right)t \qquad (51)$$



איור 11: מערכת צירים שבה ציר y מנוגד לכיוון הכוח וציר x ניצב לו.

קואורדינטות מיקום הגוף נתונות על ידי:

$$x = v_{0x} t = (v_0 \cos\alpha_0)t \qquad (52)$$

$$y = v_{0y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 = (v_0 \sin\alpha_0)t + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{F}{m}\right)t^2 \qquad (53)$$

למציאת משוואת מסלול הגוף, נחלץ את t ממשוואה (52):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0} \qquad (54)$$

נציב במשוואה (53) ונקבל:

$$y(t) = (v_0 \sin\alpha_0)\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{F}{m}\right)\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}\right)^2$$

ממשוואה זו נקבל:

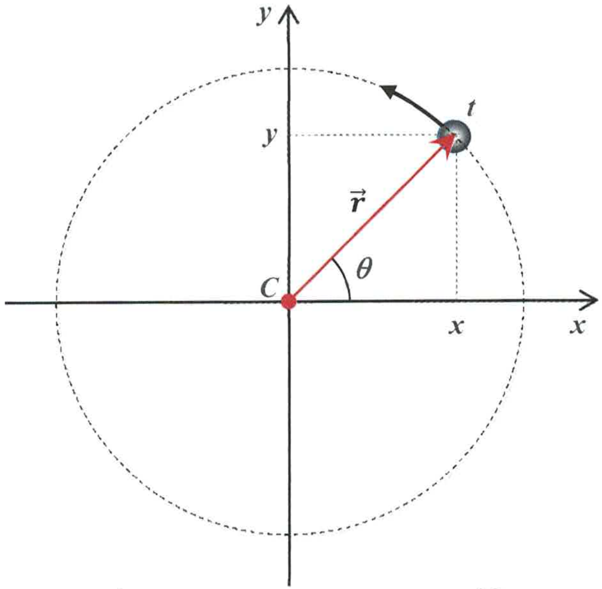
$$y(t) = (\tan\alpha_0)x + \left(\frac{F}{2mv_0^2 \cos^2\alpha_0}\right)x^2 \qquad (55)$$

זוהי פונקציה ריבועית המתארת מסלול שהוא פרבולה.

6. תנועת מעגלית וגדלים קינמטיים בתנועה מעגלית

תנועה מעגלית היא תנועה שבה הגוף נע במסלול שכל נקודותיו נמצאות במישור, ומרחקן מנקודה קבועה הנמצאת במישור זה הוא קבוע. הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל ומסומנת בדרך כלל באות C והמרחק הקבוע נקרא מחוג או רדיוס המעגל ומסומן באות R.

6.1 המיקום בתנועה מעגלית



איור 12: קביעת המיקום בתנועה מעגלית.

באיור 12 מתואר גוף הנע במסלול מעגלי הנמצא במישור הדף, מרכזו C ורדיוסו R. על מנת לקבוע את מיקומו של גוף זה בזמן מסוים t יש לבחור קודם מערכת צירים. באיור 12 מתוארת מערכת צירים xy שראשיתה נמצא במרכז המעגל, C. מיקום הגוף בזמן מסוים t נקבע במערכת זו באחת משתי דרכים:

1. על ידי הקואורדינטות x ו-y של הנקודה שבה נמצא הגוף בזמן המבוקש (ראה איור 12).
2. על ידי וקטור המיקום $\vec{r}$ שהוא וקטור שזנבו נמצא בראשית הצירים וראשו בנקודה שבה נמצא הגוף. אורכו של וקטור זה מייצג את המרחק בין הנקודה שבה נמצא הגוף ובין הראשית, וכיוונו מייצג את הזווית בין וקטור זה ובין הכיוון החיובי של ציר x (הזווית θ באיור 12). מכיוון שכל הנקודות על מסלול הגוף בתנועה מעגלית נמצאות באותו מרחק מראשית הצירים (שהוא, כזכור, R), מספיק בשיטה זו לקבוע את ערכה של הזווית θ על מנת לקבוע את מיקומו של הגוף.

מוסכם שהזווית θ נמדדת תמיד ביחס לכיוון החיובי של ציר x, והיא נחשבת חיובית כאשר הגוף מסתובב מציר x נגד כיוון מחוגי השעון ושלילית כאשר הגוף מסתובב מציר x בכיוון תנועת מחוגי השעון. זווית זו נמדדת במעלות (מעלות קשת) או ברדיאנים (rad). נציין כאן שהרדיאן (rad) היא יחידת מדידה לזווית המוגדרת באופן הבא:

רדיאן אחד מוגדר כזווית המרכזית במעגל שאורך הקשת שמולה שווה לרדיוס המעגל. על פי הגדרה זו אם אורך הקשת מול זווית מרכזית מסוימת במעגל הוא s, אז גודלה של זווית זו ברדיאנים הוא:

$$\theta(\text{rad})=\frac{s}{R} \tag{56}$$

לכן אם $s=R$ אז $\theta=1\text{rad}$, אם $s=1.5R$ אז $\theta=1.5\text{rad}$, וכך הלאה.

על פי ההגדרה (56) נקבל שאורך הקשת מול זווית מרכזית במעגל שגודלה θ רדיאנים נתון על ידי:

$$s=R\theta \tag{57}$$

כאשר R הוא רדיוס המעגל. הקשר האחרון מציג את חשיבות הבעת הזווית ברדיאנים. הבעת הזווית ברדיאנים מאפשרת חישוב אורך הקשת במעגל מול הזווית המרכזית בקלות וזאת על פי משוואה (57).

על פי הגדרת הרדיאן מתקיים:

1. הרדיאן מבטא יחס ביו אורכים, לכן יחידה זו לא מבטאת גודל פיזיקלי.
2. מספר הרדיאנים במעגל שלם שווה להיקף המעגל מחולק ב- R. מכיוון שהיקף המעגל שווה ל- $2\pi R$, נקבל שמספר הרדיאנים במעגל הוא $2\pi R/R=2\pi$.
3. מכיוון שמעגל שלם מכיל 360° ובו בזמן מכיל $2\pi\,\text{rad}$, נקבל שגודלו של רדיאן אחד במעלות הוא:

$$1\,\text{rad}=\frac{360^\circ}{2\pi}=57.23^\circ \qquad (58)$$

דוגמאות:

דוגמה 1

תלמיד רץ במסלול מעגלי שרדיוסו $20\,\text{m}$ במהירות שגודלה $4\,\text{m/s}$.

א. חשב את הזווית המרכזית (ברדיאנים) המתאימה לאורך קשת המעגל שעובר התלמיד בפרקי זמן של: $1\,\text{s}$, $2\,\text{s}$ ו-$5\,\text{s}$.

ב. התלמיד עובר זווית מרכזית של $3\,\text{rad}$. חשב את הדרך שעבר התלמיד, ואת הזמן בו חלף על פני זווית זו.

פתרון:

א. במשך שניה אחת התלמיד עובר קשת שאורכה: $s_1=4\,\text{m}$, לכן הזווית המרכזית שמתאימה לקשת זו היא:

$$\theta_1=\frac{s_1}{R}=\frac{4\,\text{m}}{20\,\text{m}}=0.2\,\text{rad}$$

במשך שתי שניות התלמיד עובר קשת שאורכה: $s_2=4\times 2=8\,\text{m}$, לכן הזווית המרכזית שמתאימה לקשת זו היא:

$$\theta_2=\frac{s_2}{R}=\frac{8\,\text{m}}{20\,\text{m}}=0.4\,\text{rad}$$

במשך חמש שניות התלמיד עובר קשת שאורכה: $s_3=4\times 5=20\,\text{m}$, לכן הזווית המרכזית שמתאימה לקשת זו היא:

$$\theta_3=\frac{s_3}{R}=\frac{20\,\text{m}}{20\,\text{m}}=1\,\text{rad}$$

ב. על פי הקשר $s=R\theta$ נקבל:

$$s=(20\,\text{m})(3\,\text{rad})=60\,\text{m}$$

הזמן הדרוש לתלמיד לעבור דרך זו הוא:

$$t=\frac{s}{v}=\frac{60\,\text{m}}{4\,\text{m/s}}=15\,\text{s}$$

דוגמה 2

שני תלמידים רצים בשני מסלולים מעגליים שונים בעלי מרכז משותף.

רדיוסו של המסלול המעגלי שבו רץ התלמיד הראשון הוא $20\,\text{m}$, ורדיוסו של המסלול המעגלי שבו רץ התלמיד השני הוא $30\,\text{m}$.

נתון שכל אחד משני התלמידים עובר זווית של $4\,\text{rad}$ בזמן זהה השווה ל- $20\,\text{s}$.

א. חשב את מהירותו של כל אחד משני התלמידים.

ב. חשב את הזמן שבו כל אחד משני התלמידים משלים סיבוב שלם.

פתרון:

א. אורך הקשת אותה עובר התלמיד הראשון הוא:

$$s_1=R_1\theta=(20\,\text{m})(4\,\text{rad})=80\,\text{m}$$

ואורך הקשת שלאורכה רץ התלמיד השני הוא:

$$s_2=R_2\theta=(30\,\text{m})(4\,\text{rad})=120\,\text{m}$$

מכיוון ששני התלמידים עוברים מרחקים אלה באותו זמן $(20\,\text{s})$, נקבל:

$$v_1=\frac{s_1}{\Delta t}=\frac{80\,\text{m}}{20\,\text{s}}=4\,\text{m/s}$$

$$v_2=\frac{s_2}{\Delta t}=\frac{120\,\text{m}}{20\,\text{s}}=6\,\text{m/s}$$

ב.

$$t_1=\frac{2\pi R_1}{v_1}=\frac{2\pi(20\,\text{m})}{4\,\text{m/s}}=31.4\,\text{s}$$

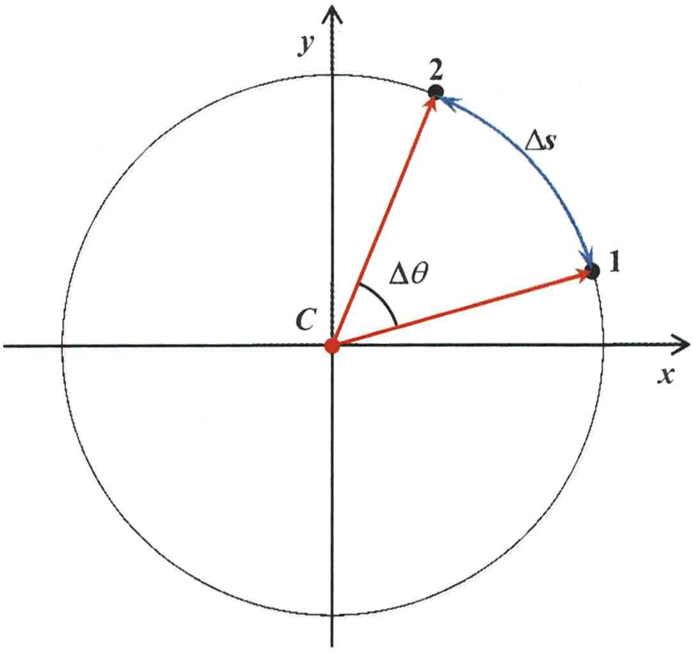
$$t_2=\frac{2\pi R_2}{v_2}=\frac{2\pi(30\,\text{m})}{6\,\text{m/s}}=31.4\,\text{s}$$

6.2 מהירות קווית ומהירות זוויתית בתנועה מעגלית

המהירות הקווית של גוף הנע בתנועה מעגלית מוגדרת כקצב שינוי הדרך אותה עובר הגוף במהלך תנועתו.

המהירות הזוויתית של גוף הנע בתנועה מעגלית מוגדרת כקצב שינוי הזווית המרכזית במהלך תנועת הגוף.

על מנת שנבהיר הגדרות אלה, נניח שגוף מסוים נע בתנועה מעגלית במעגל שרדיוסו R ומרכזו C, כפי שמתואר באיור 13. נניח שבפרק זמן מסוים Δt הגוף עובר מנקודה 1 לנקודה 2, כך שהוא עובר דרך (קשת) שאורכה Δs ובמקביל - זווית מרכזית $\Delta\theta$ (ראה תרשים).



איור 13: גוף נע בתנועה מעגלית.

אם התנועה המעגלית קצובה, כלומר הגוף עובר במסלולו דרכים שוות בזמנים שווים, אז המהירות הקווית של הגוף, שמסומנת באות v, היא גודל קבוע המוגדר על ידי הביטוי:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (59)$$

ביטוי זה מבטא את הדרך שעובר הגוף ביחידת זמן אחת במהלך תנועתו. על פי ביטוי זה יחידת המהירות הקווית היא $\mathrm{m/s}$.

אם המהירות הקווית אינה קבועה, אז הביטוי (59) מבטא את המהירות הקווית הממוצעת של הגוף, $\bar{v}$. במקרה זה המהירות הקווית הרגעית (המהירות בזמן מסוים) נתונה על ידי הביטוי:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (60)$$

באותה דרך, אם התנועה המעגלית קצובה, המהירות הזוויתית של הגוף, שמסומנת באות ω (אומגה), היא גודל קבוע המוגדר על ידי הביטוי:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (61)$$

גודל זה מבטא את גודל הזווית המרכזית שעובר הגוף ביחידת זמן אחת במהלך תנועתו. על פי ביטוי זה יחידת המהירות הזוויתית היא $\mathrm{rad/s}$. (בהמשך נראה שיחידה זו שקולה ל-$1/\mathrm{s}$).

אם המהירות הזוויתית אינה קבועה, הביטוי (61) מבטא את המהירות הזוויתית הממוצעת של הגוף, $\bar{\omega}$. במקרה זה המהירות הזוויתית הרגעית (המהירות הזוויתית בזמן מסוים) נתונה על ידי הביטוי:

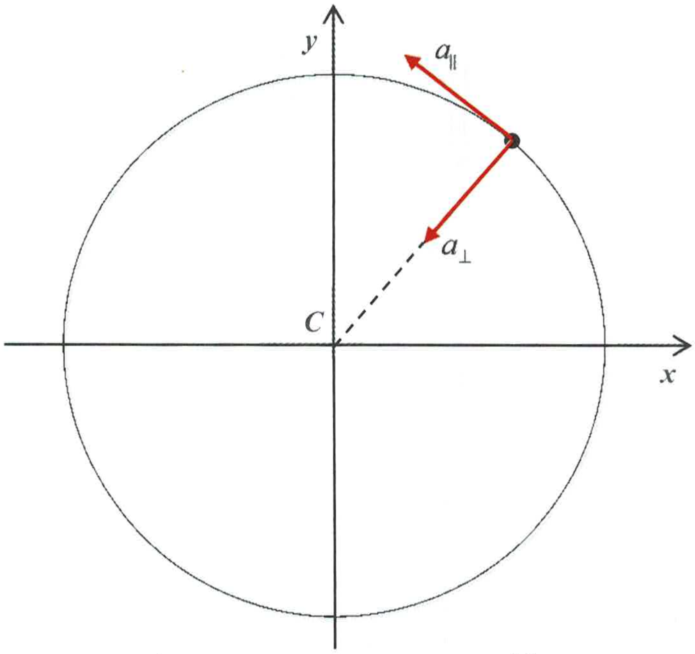
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (62)$$

המהירות הקווית והזוויתית קשורות זו בזו. על מנת למצוא את הקשר בין שני גדלים אלה, נציב הקשר $\Delta s = R\Delta\theta$ במשוואה (59) עבור המהירות הקווית ונקבל:

$$v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega \qquad (63)$$

6.3 התאוצה בתנועה מעגלית

בתת סעיף 1.5 בפרק זה למדנו שבתנועה במישור יש לתאוצה שני רכיבים, $a_\parallel$ בכיוון המשיק למסלול, ו- $a_\perp$ בכיוון ניצב למסלול. $a_\parallel$ הוא שגורם לשינוי גודל מהירות הגוף, ו- $a_\perp$ הוא הגורם לשינוי כיוון מהירות הגוף.



איור 14: רכיבי התאוצה בתנועה מעגלית

באופן דומה, לתאוצה של גוף הנע בתנועה מעגלית יש בכל נקודה שני רכיבים, כפי שמתואר באיור 14, והם: $a_\parallel$ בכיוון המשיק למעגל בנקודה בה נמצא הגוף, ו- $a_\perp$ בכיוון הניצב למעגל (למשיק) בנקודה זו. מכיוון שהניצב למשיק במעגל מכוון בכיוון מרכז המעגל (בכיוון הרדיוס), $a_\perp$ נקרא גם תאוצה צנטריפטלית (לכיוון המרכז) ומסומנת במקרה זה ב- a_c, וגם תאוצה רדיאלית (בכיוון הרדיוס) ומסומנת ב- a_r.

ניתן להוכיח (ראה נספח בסוף הפרק) שגודלה של התאוצה הצנטריפטלית של גוף הנע במסלול מעגלי בנקודה מסוימת נתון על ידי הביטוי:

$$a_\perp = \frac{v^2}{R} \tag{64}$$

כאשר v היא מהירות הגוף בנקודה זו ו- R רדיוס המסלול המעגלי.

בתנועה מעגלית קצובה, גודל המהירות v הוא קבוע, לכן בתנועה מעגלית קצובה התאוצה המשיקית מתאפסת $\left(a_\parallel = 0\right)$ והתאוצה הרדיאלית קבועה בגודלה $\left(a_c = v^2 / R\right)$.

מכיוון שמתקיים $v = \omega R$, נקבל:

$$a_\perp = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R \tag{65}$$

6.4 התדירות וזמן המחזור בתנועה מעגלית

קיימים שני גדלים חשובים נוספים הקשורים לתנועה מעגלית קצובה (וגם זה לזה), והם זמן המחזור והתדירות.

זמן המחזור בתנועה מעגלית קצובה הוא הזמן הדרוש לגוף להשלים סיבוב אחד שלם. גודל זה מסומן באות T. בדרך כלל זמן המחזור נמדד בשניות (s).

אם נתון גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה ברדיוס R ובמהירות קווית v, זמן המחזור שווה להיקף המסלול $(2\pi R)$ מחולק במהירות (v):

$$T = \frac{2\pi R}{v} \tag{66}$$

על פי הקשר (63), הגודל R/v שווה ל- $1/\omega$, כאשר ω היא המהירות הזוויתית של הגוף. לכן מהביטוי האחרון נקבל:

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{67}$$

שים לב שהגודל 2π בביטוי האחרון הוא גודל הזווית במעגל שלם, כשהוא מבוטא ברדיאנים (ומתאים ל-360 מעלות). לכן גודל זה מחולק במהירות הזוויתית ω מבטא את הזמן הדרוש לגוף להשלים סיבוב שלם (כלומר זמן המחזור). מהקשר האחרון נקבל ש:

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{68}$$

התדירות בתנועה מעגלית קצובה היא מספר הסיבובים שהגוף משלים ביחידת זמן אחת. גודל זה מסומן באות f, מהמילה frequency.

בין התדירות לזמן המחזור מתקיים הקשר הבא:

$$f=1/T \tag{69}$$

מהקשר (67) מתקבל:

$$f=\frac{\omega}{2\pi} \tag{70}$$

יחידת התדירות היא $1/\mathrm{s}$. יחידה זו נקראת בהקשר זה הרץ, ומסומנת ב- Hz:

$$[f]=\frac{1}{\mathrm{s}}=\mathrm{Hz} \tag{71}$$

דוגמאות בתאוצה וזמן המחזור בתנועה מעגלית

דוגמה 1

גוף נע במסלול מעגלי במהירות קווית קבועה שגודלה $2\,\mathrm{m/s}$. נתון שרדיוס המסלול הוא $40\,\mathrm{cm}$.

א. חשב את המהירות הזוויתית של הגוף.

ב. חשב את זמן המחזור ואת התדירות בתנועה מעגלית זו.

ג. חשב את רכיבי תאוצת הגוף, $a_{\parallel}$ ו- $a_{\perp}$.

פתרון:

א. $\omega=\frac{v}{R}=\frac{2\,\mathrm{m/s}}{0.4\,\mathrm{m}}=5\,\mathrm{rad/s}$.

ב. מתקיים:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{5\,\mathrm{rad/s}}=1.25\,\mathrm{s}$$

$$f=1/T=0.8\,\mathrm{Hz}$$

ג. מכיוון שגודל המהירות הקווית של הגוף קבוע נקבל ש- $a_{\parallel}=0$. גודלה של התאוצה הצנטריפטלית במקרה זה קבוע ושווה ל:

$$a_{\perp}=\frac{v^2}{R}=\frac{(2)^2}{0.4}=10\,\mathrm{m/s^2}$$

דוגמה 2

נתון שרדיוס כדור הארץ הוא $6,380\,\mathrm{km}$ וזמן המחזור שלו סביב ציר הוא 24 שעות (במדויק 23 שעות ו-57 דקות).

א. חשב את המהירות הזוויתית של כדור הארץ בתנועתו סביב צירו.

ב. חשב את המהירות הקווית של הנקודות הנמצאות על קו המשווה של כדור הארץ ביחס למרכז כדור הארץ.

ג. חשב את התאוצה המשיקית ואת התאוצה הצנטריפטלית של גופים הנמצאים על קו המשווה ביחס למרכז כדור הארץ.

פתרון:

א.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{(24\cdot 60\cdot 60)\,\mathrm{s}}=7.27\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$$

ב.

$$v=\omega R=\left(7.27\times10^{-5}\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)(6,380,000\,\mathrm{m})=$$
$$=463.8\,\mathrm{m/s}$$

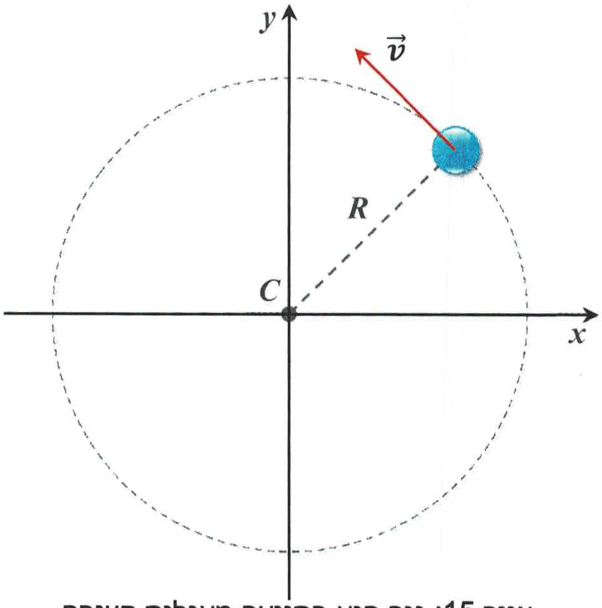
ג.

$$a_{\parallel}=0$$
$$a_{\perp}=\omega^2R=$$
$$=\left(7.27\times10^{-5}\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2\left(6.38\times10^{6}\,\mathrm{m}\right)=$$
$$=0.0337\,\mathrm{m/s^2}$$

7. דינמיקה של תנועה מעגלית קצובה

בסעיף זה נדון בכוחות הפועלים על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה. באיור 15 מתואר גוף שמסתו m הנע במסלול מעגלי שרדיוסו R במהירות קווית שגודלה קבוע v. נתחיל מהשאלה הבאה: האם תנועה זו אפשרית ללא פעולת כוח על הגוף?

התשובה היא שלילית, כי אם לא יפעל כוח על הגוף, נקבל, על פי החוק הראשון של ניוטון, שהגוף נמצא במצב התמדה. כלומר הגוף ינוע בקו ישר ובמהירות קבועה. מכיוון שבתנועה מעגלית הגוף לא נע בקו ישר, ברור שהכוח השקול עליו אינו מתאפס.



איור 15: גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה

נענה על השאלות הבאות הקשורות לכוח זה:

1. מהו כיוונו של הכוח השקול הפועל על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה, וכיצד ניתן לחשב את גודלו?
2. מהו מקורו של כוח זה?

התשובה לשאלה 1: בתת סעיף 6.3 בפרק זה מצאנו שיש לגוף הנע בתנועה מעגלית קצובה תאוצה קבועה בגודלה המכוונת לכיוון מרכז הסיבוב, תאוצה שנקראת תאוצה צנטריפטלית. תאוצה זו מסומנת ב-a_c או $a_\perp$ או a_r וגודלה נתון על ידי הביטוי $a_c = v^2 / R = \omega^2 R$, כאשר ω היא המהירות הזוויתית של הגוף.

על פי החוק השני של ניוטון, הכוח השקול הפועל על גוף מכוון תמיד בכיוון תאוצת הגוף וגודלו נתון על ידי הקשר $\Sigma F = ma$. מכאן שכיוונו של הכוח השקול הפועל על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה הוא בכיוון מרכז הסיבוב וגודלו נתון על ידי:

$$\Sigma F_c = ma_c = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \qquad (72)$$

מכיוון שכוח זה מכוון לכיוון מרכז הסיבוב הוא נקרא כוח צנטריפטלי (הכוח המכוון לכיוון המרכז centripetal force), והוא מסומן ב-F_c או ב-F_r (בכיוון הרדיוס) או ב-$F_\perp$ (בכיוון הניצב למשיק של המעגל בנקודה שבה מחשבים כוח זה).

על פי הביטוי (72) הכוח הצנטריפטלי נמצא ביחס ישר למסת הגוף ולריבוע מהירותו, וביחס הפוך לרדיוס המסלול המעגלי.

התשובה לשאלה 2: מקור הכוח הצנטריפטלי הפועל על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה תלוי בבעיה עצמה. בתנועת הירח סביב כדור הארץ הכוח הצנטריפטלי הפועל על הירח הוא הכוח הגרביטציוני שכדור הארץ מפעיל על הירח. בתנועת המעגלית של האלקטרון סביב הפרוטון באטום המימן, הכוח הצנטריפטלי הפועל על האלקטרון הוא הכוח החשמלי שהפרוטון מפעיל על האלקטרון. בתנועה המעגלית של מכונית במסלול מעגלי, הכוח הצנטריפטלי הוא כוח החיכוך הפועל על צמיגי המכונית בכיוון מרכז המעגל. בסעיף הבא נדון בבעיות בנושא תנועה מעגלית קצובה ובסוגים נוספים של כוחות צנטריפטליים.

8. בעיות בדינמיקה של תנועה מעגלית קצובה

בעיה 1 (סיבוב גוף הקשור לחוט)

גוף שמסתו $m=0.4\,\text{kg}$ קשור לציר סיבוב קבוע באמצעות חוט שאורכו $0.6\,\text{m}$, ונע סביב ציר הסיבוב בתנועה מעגלית קצובה במהירות שגודלה $3\,\text{m/s}$, באזור בו לא קיים כוח הכובד (נניח בחלל החיצון, הרחק מכדור הארץ).

א. חשב את הכוח הצנטריפטלי הדרוש לקיום תנועה זו.

ב. חשב את גודל המתיחות בחוט.

ג. חשב את המהירות הקווית המקסימלית האפשרית עבור הגוף על מנת שהחוט לא ייקרע, אם נתון שהמתיחות המקסימלית שהחוט יכול לשאת היא $24\,\text{N}$.

ד. חשב את תדירות הסיבוב ואת זמן המחזור עבור המהירות שחישבת בסעיף הקודם.

פתרון:

א. על פי משוואה (72) הכוח הצנטריפטלי הדרוש עבור תנועה מעגלית זו הוא:

$$F_c=m\frac{v^2}{R}=0.4\frac{3^2}{0.6}=6\,\text{N}$$

ב. מכיוון שמקור הכוח הצנטריפטלי בבעיה זו הוא המתיחות בחוט, נקבל:

$$T=F_c=6\,\text{N}$$

ג. מכיוון שמתקיים:

$$T=mv^2/R$$

נקבל שהמהירות המקסימלית האפשרית $v_{\max}$ היא זו שעבורה מתקיים $T=T_{\max}$. לכן נקבל:

$$m\frac{v_{\max}^2}{R}=T_{\max}$$

$$\Rightarrow v_{\max}=\sqrt{\frac{RT_{\max}}{m}}=\sqrt{\frac{0.6\cdot 24}{0.4}}=6\,\text{m/s}$$

ד. תדירות הסיבוב נתונה על ידי:

$$f=\frac{\omega_{\max}}{2\pi}=\frac{v_{\max}/R}{2\pi}=\frac{6/0.6}{2\pi}=1.6\,\text{Hz}$$

$$T=\frac{1}{f}=0.625\,\text{s}$$

בעיה 2 (כוח הגרביטציה על הירח)

חשב את הכוח הגרביטציוני שכדור הארץ מפעיל על הירח. בתשובתך התבסס על הנתונים הבאים: מסת הירח $7.35\times10^{22}\,\text{kg}$, מרחק מרכז הירח ממרכז כדור הארץ $384{,}000\,\text{km}$ וזמן המחזור של תנועתו סביב כדור הארץ הוא 27.3 ימים.

פתרון:

התנועה המעגלית של הירח סביב כדור הארץ נוצרת בגלל כוח צנטריפטלי, שהוא הכוח הגרביטציוני שכדור הארץ מפעיל עליו והמסומן ב- F_G. על פי משוואה (72) נקבל:

$$F_G=m\omega^2R=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R$$

נציב:

$$m=7.35\times10^{22}\,\text{kg}$$

$$T=27.3\times24\times3600\,\text{s}=2{,}358{,}720\,\text{s}$$

$$R=384{,}000\,\text{km}=3.84\times10^8\,\text{m}$$

ונקבל:

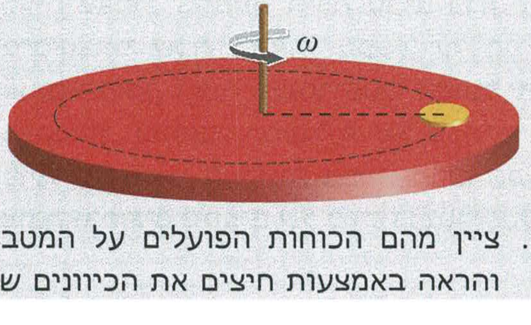
$$F_G=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R=$$

$$=7.35\times10^{22}\left(\frac{2\pi}{2{,}358{,}720\,\text{s}}\right)^2\left(3.84\times10^8\,\text{m}\right)$$

$$=2\times10^{20}\,\text{N}$$

בעיה 3 (תנועה מעגלית בהשפעת כוח החיכוך)

בתרשים שלפניך מתואר תקליטור המסתובב במישור אופקי סביב צירו במהירות זוויתית קבועה שגודלה $4\,\text{rad/s}$. על התקליטור, במרחק $20\,\text{cm}$ ממרכזו, מונח מטבע שמסתו $50\,\text{g}$. המטבע מסתובב יחד עם התקליטור בהשפעת כוח החיכוך שמפעיל עליו התקליטור (ראה תרשים).



א. ציין מהם הכוחות הפועלים על המטבע והראה באמצעות חיצים את הכיוונים של

כוחות אלה.

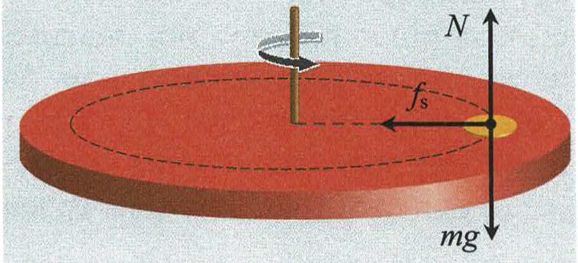
ב. חשב את הכוחות שציינת בסעיף הקודם.

ג. הסבר למה לא פועל כוח חיכוך על המטבע בכיוון המשיק למסלולו המעגלי.

ד. חשב את תדירות הסיבוב המקסימלית האפשרית לתקליטור על מנת שהמטבע לא יתנתק ממנו, אם נתון שמקדם החיכוך הסטטי בין המטבע לתקליטור הוא 0.5 .

פתרון:

א. הכוחות הפועלים על המטבע הם: כוח הכובד $F_G = mg$ בכיוון מטה, הכוח הנורמלי N בכיוון מעלה וכוח החיכוך הסטטי f_s בכיוון מרכז הסיבוב (בכיוון תאוצת המטבע). כוחות אלה מתוארים בתרשים הבא:



ב. נבחר מערכת צירים שבה ציר x בכיוון המרכז (בכיוון התאוצה) וציר y ניצב לו וכיוונו החיובי כלפי מעלה. במערכת זו נקבל:

$$F_G = -mg = -\frac{50}{1000}(10) = -0.5\,\text{N}$$

על פי החוק הראשון של ניוטון מתקיים בכיוון ציר y:

$$N + F_G = 0 \;\Rightarrow N = 0.5\,\text{N}$$

על פי החוק השני של ניוטון נקבל בכיוון ציר x:

$$f_s = m\omega^2 R = (0.05)(4^2)(0.2) = 0.16\,\text{N}$$

ג. מכיוון שהתנועה המעגלית של המטבע היא קצובה, נקבל ש- $a_{\parallel} = 0$, כלומר התאוצה המשיקית מתאפסת. לכן על פי החוק השני של ניוטון, הכוח השקול הפועל על הגוף בכיוון המשיק מתאפס. מכיוון שהכוח היחיד שיכול לפעול על המטבע בכיוון המשיק למסלול המעגלי הוא כוח החיכוך הסטטי, נקבל שכוח זה מתאפס, כלומר לא פועל על המטבע כוח חיכוך בכיוון המשיק למסלולו המעגלי.

ד. כל עוד מתקיים שכוח החיכוך הסטטי f_s בכיוון המרכז והדרוש לתנועה המעגלית קטן מ- $f_{s\max}$, המטבע ימשיך להסתובב עם התקליטור ואינו מתנתק ממנו. כאשר מתקיים: $f_s = f_{s\max}$, המטבע יהיה על סף התנתקות. לכן המהירות הזוויתית המקסימלית האפשרית עבור התקליטור על מנת שהמטבע לא יתנתק ממנו היא שמקיימת:

$$f_s = f_{s\max}$$

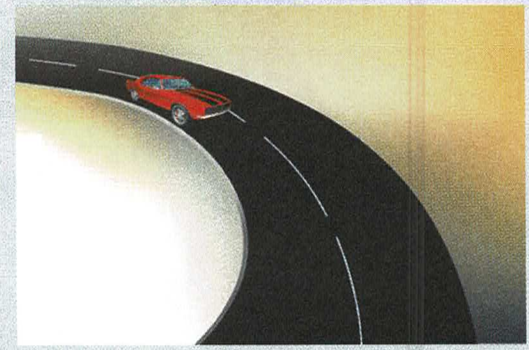
$$\Rightarrow m\omega_{\max}^2 R = \mu_s mg$$

$$\Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_s g}{R}} = \sqrt{\frac{0.5(10)}{0.2}} = 5\,\text{rad/s}$$

בעיה 4 (תנועת מכונית במעקם מעגלי)

מכונית נכנסת למעקם מעגלי הנמצא במישור אופקי, במהירות שגודלה קבוע (ראה תרשים).

ענה על הסעיפים שלהלן. נתון: מסת המכונית m, גודל מהירות המכונית v, רדיוס המסלול המעגלי הוא R ומקדם החיכוך הסטטי בין צמיגי המכונית והכביש הוא μ_s.



א. מהם הכוחות הפועלים על המכונית במעקם המעגלי? ציין באמצעות חיצים את כיוונם של כוחות אלה.

ב. בטא באמצעות נתוני השאלה (כולם או חלקם) את הכוחות שציינת בסעיף הקודם.

ג. מצא את המהירות המקסימלית $(v_{\max})$ המותרת למכונית במעקם המעגלי על מנת שלא תחליק. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים: μ_s, R ו- g.

נתון: מסת המכונית $1000\,\text{kg}$, $R = 40\,\text{m}$ ו- $\mu_s = 1$.

ד. חשב את $v_{\max}$. בטא את תשובתך

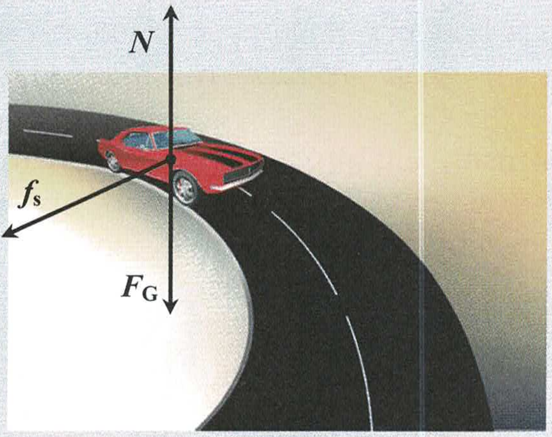
ביחידות km/h.

ה. חשב את גודלו וכיוונו של כוח החיכוך הפועל על המכונית כאשר מהירותה שווה לחצי $v_{\max}$ (גודל שחישבת בסעיף הקודם).

פתרון:

א. הכוחות הפועלים על המכונית במעקם המעגלי הם: כוח הכובד F_G כלפי מטה, הכוח הנורמלי N כלפי מעלה, וכוח החיכוך הסטטי f_s בכיוון מרכז הסיבוב. החיכוך במקרה זה הוא סטטי ולא קינטי כי הצמיגים במהלך תנועת המכונית נאחזים בכביש ואינם מחליקים עליו.

כוחות אלה מתוארים בתרשים הבא:



ב. נבחר ציר x בכיוון התאוצה (בכיוון f_s) וציר y ניצב לכביש בכיוון מעלה, ונקבל:

$$F_G = -mg$$

על פי החוק הראשון של ניוטון נקבל בכיוון ציר y:

$$N + F_G = 0$$

$$\Rightarrow N + (-mg) = 0 \;\Rightarrow N = mg$$

על פי החוק השני של ניוטון בתנועה המעגלית נקבל שבכיוון ציר x מתקיים:

$$f_s = m\frac{v^2}{R}$$

ג. על מנת שהמכונית לא תחליק צריך להתקיים שכוח החיכוך הסטטי f_s הדרוש לתנועה המעגלית של המכונית, קטן או שווה ל- $f_{s\max}$:

$$f_s \le f_{s\max} \;\Rightarrow m\frac{v^2}{R} \le \mu_s mg$$

המהירות המקסימלית המותרת היא המהירות שעבורה מתקיים שוויון בין f_s ל- $f_{s\max}$. מהקשר האחרון נקבל:

$$m\frac{v_{\max}^2}{R} = \mu_s mg \;\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\mu_s Rg}$$

ד.

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_s Rg} = \sqrt{1(40)(10)}$$

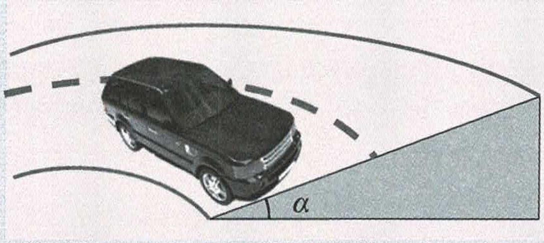
$$\Rightarrow v_{\max} = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$$

ה. כאשר $v = 10\,\mathrm{m/s}$ נקבל:

$$f_s = m\frac{v^2}{R} = (1000)\frac{10^2}{40} = 2,500\,\mathrm{N}$$

בעיה 5 (תנועת מכונית במעקם מעגלי משופע)

על מנת להפחית את סכנת ההחלקה בסיבובים, נהוג לתכנן את הפניות בכבישים כך שהם מוגבהים בקצה החיצוני שלהם. במקרה זה נוצר לרוחב הכביש שיפוע המאופיין בזווית α, שהיא הזווית בין הכביש לקרקע בחתך רוחב שלהם (ראה תרשים).



על מנת להבין איך השיפוע לרוחבו של הכביש מקטין את סכנת ההחלקה של המכוניות במקרים כאלה, נדון בשאלות הבאות.

א. מהם הכוחות הפועלים על המכונית במעקם מעגלי משופע? שרטט חתך רוחב של הכביש והמכונית, וסמן את כיוון הכוחות הפועלים על המכונית בחתך זה באמצעות חיצים.

ב. בחר מערכת צירים xy מתאימה, והראה בעזרתה כיצד השיפוע לרוחב הכביש מפחית מסכנת ההחלקה של המכוניות במהלך הפניות.

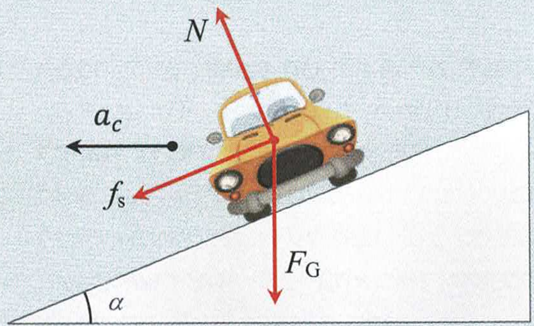
ג. חשב את גודל המהירות הדרושה על מנת שהמכונית תנוע על המעקם המוגבה ללא צורך בכוח חיכוך סטטי לרוחב הכביש. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים:

זווית השיפוע α, תאוצת הכובד g ורדיוס הסיבוב (רדיוס המסלול המעגלי שבו המכונית נוסעת), R.

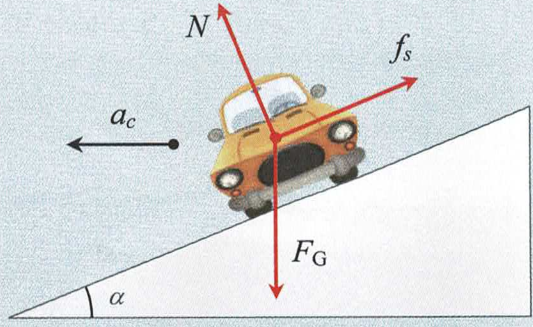
ד. קבע מהו כיוון החיכוך הסטטי הפועל על צמיגי המכונית (לרוחב הכביש) בתנועתה המעגלית כאשר היא נעה במהירות קבועה גדולה או קטנה יותר מהמהירות שמצאת בסעיף הקודם.

פתרון:

א. הכוחות הפועלים על המכונית במצב זה הם: כוח הכובד F_G בכיוון מטה, הכוח הנורמלי N בכיוון הניצב לכביש, וכוח החיכוך הסטטי f_s. לגבי כיוון החיכוך הסטטי קיימות שתי אפשרויות: האפשרות האחת - כאשר מהירות המכונית מספיק גבוהה והיא נוטה להחליק כלפי חוץ. במקרה זה כיוון החיכוך הסטטי הוא לרוחב הכביש ובמקביל לו פנימה, כפי שמתואר בתרשים הבא:



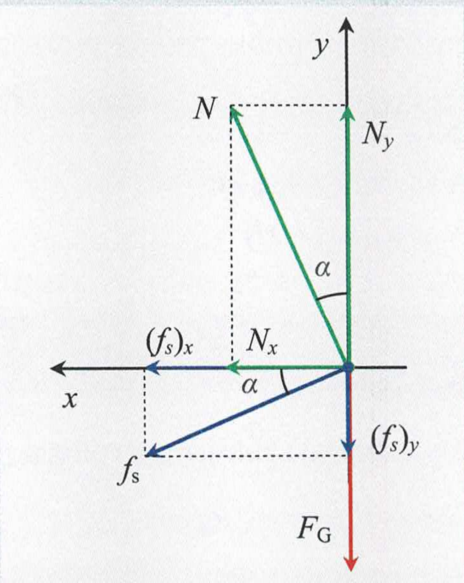
האפשרות השנייה - כאשר מהירות המכונית מספיק קטנה והיא נוטה להחליק כלפי פנים. במקרה זה כיוון החיכוך הסטטי הוא לרוחב הכביש ובמקביל לו החוצה, כמתואר בתרשים הבא:



מכיוון שמטרת השיפוע בכביש היא למנוע את החלקת המכונית כלפי חוץ כאשר היא נוסעת במהירות גבוהה, המצב הרלוונטי לבעיה זו הוא המצב המתואר בתרשים הראשון, שבו מהירות המכונית גבוהה והחיכוך הסטטי מקביל לכביש ומכוון פנימה.

ב. מכיוון שיש למכונית תאוצה צנטריפטלית (a_c) בגלל תנועתה המעגלית (ראה תרשים בסעיף הקודם), נבחר את אחד הצירים (ציר x) בכיוון התאוצה ואת הציר האחר (ציר y) בכיוון הניצב לו. מערכת צירים כזאת גורמת ל"הפרדה" בין החוקים הראשון והשני של ניוטון. בכיוון ציר x מתקיים החוק השני של ניוטון, ובכיוון ציר y מתקיים החוק הראשון של ניוטון. דבר זה מקל את הטיפול המתמטי בבעיה.

בתרשים הבא מתוארת מערכת הצירים שבחרנו ואת הכוחות ורכיביהם במערכת זו:



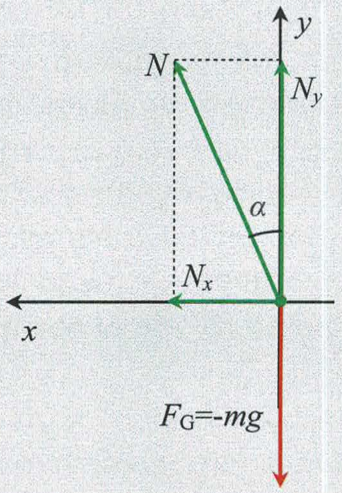
שים לב, שבמערכת הצירים שבחרנו, הזווית בין f_s לציר x היא α, וכך גם הזווית בין N והכיוון החיובי של ציר y.

על פי התרשים, הכוח השקול הפועל בכיוון מרכז המעגל (בכיוון ציר x) הוא:

$$\Sigma F_c = N_x + \left(f_s\right)_x = N\sin\alpha + f_s\cos\alpha$$

על פי ביטוי זה ניתן להסיק שהשיפוע בכביש יוצר רכיב של הכוח הנורמלי N המכוון לכיוון מרכז הסיבוב. רכיב זה פועל בנוסף לרכיב כוח החיכוך הסטטי להחזקת המכונית ומניעת החלקתה כלפי חוץ, דבר שמפחית את סכנת ההחלקה על הכביש המעגלי לעומת המצב שבו אין לכביש שיפוע.

ג. בתרשים הבא מתוארים הכוחות הפועלים על המכונית במהירות שעבורה כוח החיכוך הסטטי הפועל על צמיגי המכונית לרוחב הכביש מתאפס.



על פי החוק הראשון של ניוטון נקבל בכיוון ציר y:

$$N_y + F_G = 0$$

$$\Rightarrow N\cos\alpha + (-mg) = 0$$

$$\Rightarrow N\cos\alpha = mg \quad (1)$$

ובכיוון ציר x נקבל על פי החוק השני של ניוטון:

$$N\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \quad (2)$$

נחלק משוואה 2 במשוואה 1 ונקבל:

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{Rg} \quad \Rightarrow v = \sqrt{Rg\tan\alpha}$$

ד. על פי תרשים הכוחות שבסעיף הקודם, הכוח הצנטריפטלי הפועל על המכונית כאשר היא נוסעת במהירות שמצאנו בסעיף הקודם הוא $N_x = N\sin\alpha$. אם נציב N ממשוואה (1) נקבל:

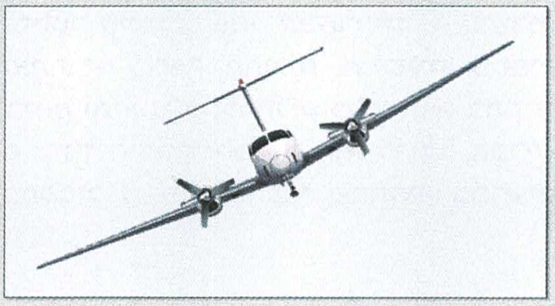
$$N_x = \left(\frac{mg}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha = mg\tan\alpha$$

כוח זה קבוע ואינו תלוי במהירות המכונית. כאשר המכונית נוסעת במהירות גדולה מהמהירות שמצאנו בסעיף הקודם, נזדקק לכוח צנטריפטלי גדול יותר מ- $N_x = mg\tan\alpha$ על מנת להחזיק את המכונית במסלולה המעגלי, אחרת המכונית תחליק כלפי חוץ. כתוצאה מכך יפעל כוח חיכוך סטטי על צמיגי המכונית לרוחב הכביש בכיוון מקביל לו פנימה.

אם המכונית נוסעת במהירות קטנה מהמהירות שמצאנו בסעיף הקודם, נזדקק לכוח צנטריפטלי קטן יותר מ- $N_x = mg\tan\alpha$ אחרת המכונית תחליק פנימה. לכן במקרה זה יפעל כוח חיכוך סטטי על צמיגי המכונית לרוחב הכביש בכיוון מקביל לכביש החוצה.

בעיה 6 (תנועה מעגלית של מטוס)

כאשר מטוסים טסים במסלול מעגלי, הם עושים זאת כשגוף המטוס נוטה בזווית מסוימת ביחס למישור תנועתם, כפי שמתואר בתרשים הבא:

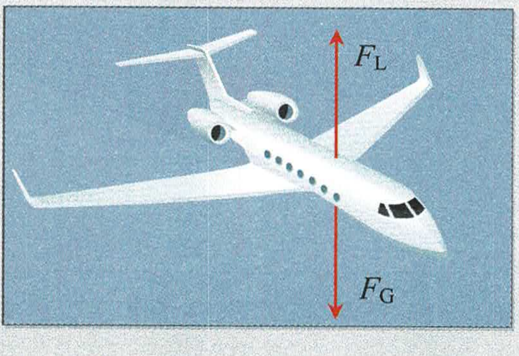


א. הסבר מדוע תנועת מטוס בפנייה מעגלית מחייבת נטייה של גוף המטוס ביחס למישור טיסתו.

ב. מצא את זווית הנטייה הדרושה עבור מטוס שמהירותו v על מנת לנוע במסלול מעגלי שרדיוסו R. בטא את תשובתך באמצעות R, v ותאוצת הכובד g.

פתרון:

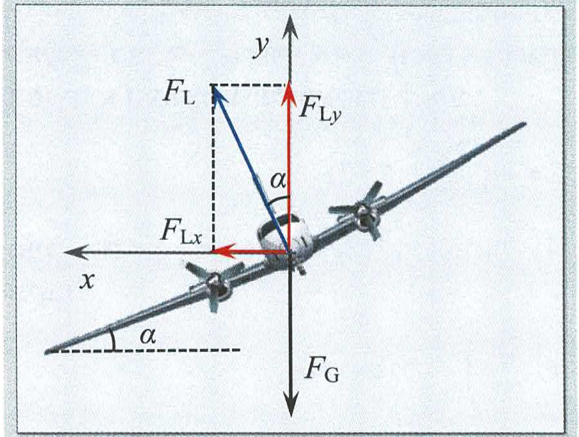
א. עלינו לדעת כי המטוס מטפס ושומר על גובה טיסתו בסיוע כוח הפועל על המטוס כלפי מעלה, בניצב לגוף המטוס, כפי שמתואר בתרשים שלפניך. כוח זה נקרא כוח עילוי ומסומן ב- F_L (*Lift Force*).



כוח העילוי נוצר בגלל זרימת האוויר סביב

כנפי המטוס כתוצאה מהתקדמות המטוס דרך האוויר במהירות גבוהה. גודלו של כוח זה תלוי במהירות המטוס, בצפיפות האוויר ובמבנה הגאומטרי של המטוס. כשהמטוס טס בקו ישר בגובה קבוע (טיסה ישרה ואופקית) מתקיים $F_L = F_G$, כאשר F_G הוא כוח הכובד הפועל על המטוס.

על מנת שהמטוס יחוג במסלול מעגלי, צריך לפעול עליו כוח צנטריפטלי. ההטיה של גוף המטוס גורמת להטיה בכיוון כוח העילוי F_L, כפי שמתואר בתרשים הבא:



כתוצאה מכך נוצרים לכוח העילוי שני רכיבים במערכת הצירים xy המתוארת בתרשים. אחד F_{Ly} כלפי מעלה שמאזן את כוח הכובד F_G, והשני F_{Lx} לכיוון מרכז הסיבוב (לכיוון התאוצה הצנטריפטלית) שמספק את הכוח הצנטריפטלי הדרוש לתנועה המעגלית של המטוס (ראה תרשים).

ב. אם נסמן את זווית הנטייה של המטוס ביחס למישור האופקי ב- α, אז כוח העילוי F_L שהוא ניצב לגוף המטוס, יוצר זווית α ביחס לציר y (ראה תרשים).

במצב זה מתקיים על פי החוק הראשון של ניוטון, בכיוון ציר y (ראה תרשים בסעיף הקודם):

$$F_{Ly} + F_G = 0$$
$$\Rightarrow F_L \cos\alpha + (-mg) = 0$$
$$\Rightarrow F_L \cos\alpha = mg \quad (1)$$

כאשר m היא מסת המטוס.

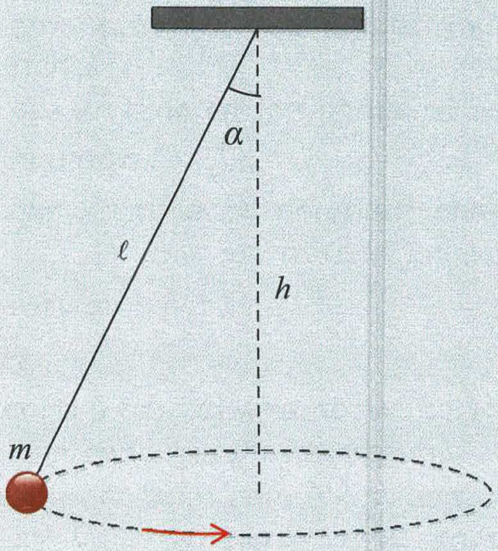
על פי החוק השני של ניוטון, בכיוון ציר x מתקיים:

$$F_L \sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \quad (2)$$

אם נחלק את משוואה (2) במשוואה (1) נקבל: $\tan\alpha = \frac{v^2}{Rg}$.

בעיה 7 (מטוטלת קונית)

בתרשים מתוארת מטוטלת קונית. מטוטלת זו מורכבת מגוף נקודתי שמסתו m הקשור לתקרה באמצעות חוט שמסתו זניחה ומסתובב במסלול מעגלי שמישורו מקביל למישור הרצפה (מישור אופקי).



המטוטלת הקונית מאופיינת באורך החוט ℓ ובזווית α, שהיא הזווית בין החוט ובין האנך (ראה תרשים).

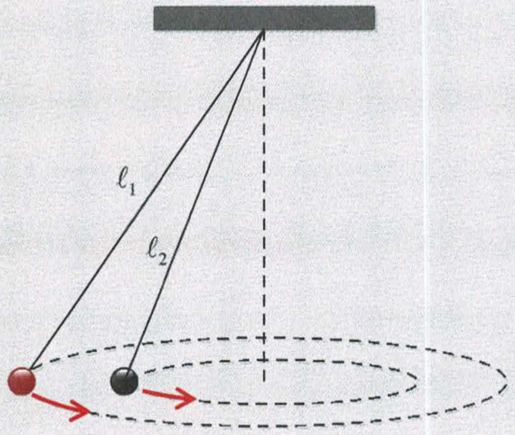
א. ציין באמצעות הוספת חיצים לשרטוט את הכוחות הפועלים על המסה הנקודתית m במהלך תנועתה. ליד כל חץ רשום את שם הכוח שהוא מייצג.

ב. קבע מהו כיוון הכוח השקול הפועל על הגוף m במהלך תנועתו.

ג. בטא את זמן המחזור של המטוטלת הקונית באמצעות α, ℓ ותאוצת הכובד g.

ד. בטא את זמן המחזור של המטוטלת הקונית באמצעות h ו- g, כאשר h הוא גובה המטוטלת הקונית (ראה תרשים).

ה. נתונות שתי מטוטלות קוניות הקשורות לאותה נקודה. אורך המטוטלת הראשונה הוא ℓ_1 ואורך המטוטלת השנייה הוא ℓ_2 כפי שמתואר בתרשים שלפניך.



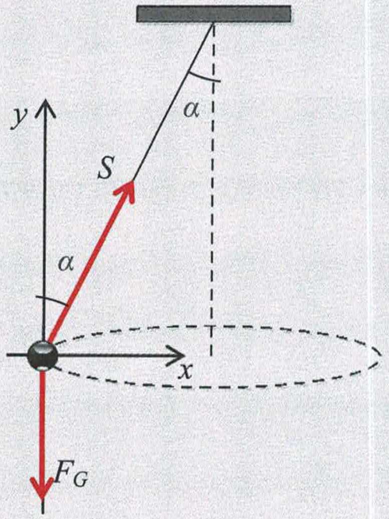
נתון ששני הגופים מסתובבים באותו מישור (כלומר יש לשתי המטוטלות אותו גובה h).

1) מצא את היחס בין זמני המחזור של שתי המטוטלות (T_2/T_1).

2) מצא את היחס בין המתיחויות בחוטים (S_2/S_1). בטא את תשובתך באמצעות הגדלים: ℓ_1 ו-ℓ_2.

פתרון:

א. בתרשים הבא מתוארים הכוחות הפועלים על הגוף במהלך תנועתו המעגלית כאשר S מסמל את המתיחות בחוט (לא השתמשנו ב-T כי T בתנועה מעגלית מייצג את זמן המחזור).



ב. הכוח השקול הפועל על הגוף במהלך תנועתו מכוון בכיוון תאוצת הגוף. מכיוון שלגוף בתנועתו מעגלית קצובה יש תאוצה לכיוון מרכז הסיבוב (בכיוון ציר x במערכת הצירים xy המתוארת בתרשים שבסעיף הקודם), נקבל שהכוח השקול הפועל על הגוף מכוון בכיוון מרכז הסיבוב (בכיוון ציר x).

ג. מכיוון שבכיוון ציר y במערכת הצירים המתוארת בסעיף א', קיים שווי משקל, נקבל על פי החוק הראשון של ניוטון:

$$S\cos\alpha+(-mg)=0$$

$$\Rightarrow S\cos\alpha=mg \quad (1)$$

כאשר S היא המתיחות בחוט. על פי החוק השני של ניוטון בכיוון ציר x מתקיים:

$$S\sin\alpha=m\omega^2R=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(\ell\sin\alpha)$$

כאשר הצבנו $R=\ell\sin\alpha$ (ראה תרשים בסעיף א'). מהמשוואה האחרונה נקבל:

$$S=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\ell \quad (2)$$

נציב את S ממשוואה (2) במשוואה (1) ונקבל:

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\ell\cos\alpha=mg$$

$$\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}}$$

ד. מתקיים ש-$\ell\cos\alpha=h$ כאשר h הוא גובה המטוטלת הקונית (ראה תרשים בסעיף א'). על פי ביטוי זה נקבל:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ה.

(1) מכיוון שלשתי המטוטלות יש את אותו גובה h, נקבל, על פי הביטוי שקיבלנו בסעיף הקודם עבור זמן המחזור, שלשתי המטוטלות יש את אותו זמן מחזור, לכן $T_2/T_1=1$.

(2) על סמך הביטוי עבור המתיחות שהתקבל בסעיף ג. נקבל:

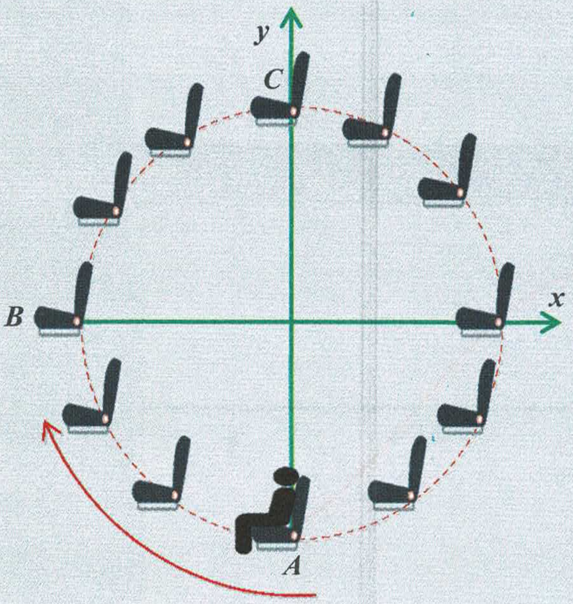
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{m(2\pi/T_1)^2\ell_1}{m(2\pi/T_2)^2\ell_2}$$

מכיוון ש-$T_1=T_2$, נקבל מהביטוי האחרון ש:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$$

בעיה 8

בתרשים א' מתואר "גלגל ענק" בגן שעשועים. הגלגל מסתובב סביב צירו במישור הניצב לפני הקרקע בתנועה מעגלית קצובה שזמן המחזור שלה T. בתרשים ב' מתואר מישור הסיבוב של הגלגל. בתרשים זה מתואר ילד היושב על אחד הכיסאות (במיקום A). מסת הילד ביחד עם הכיסא היא M. התייחס למערכת הילד והכיסא כאל גוף נקודתי ביחס לממדי הגלגל. הגלגל מסתובב בכיוון תנועת מחוגי השעון. נתון שרדיוס הגלגל הוא R.



תרשים ב

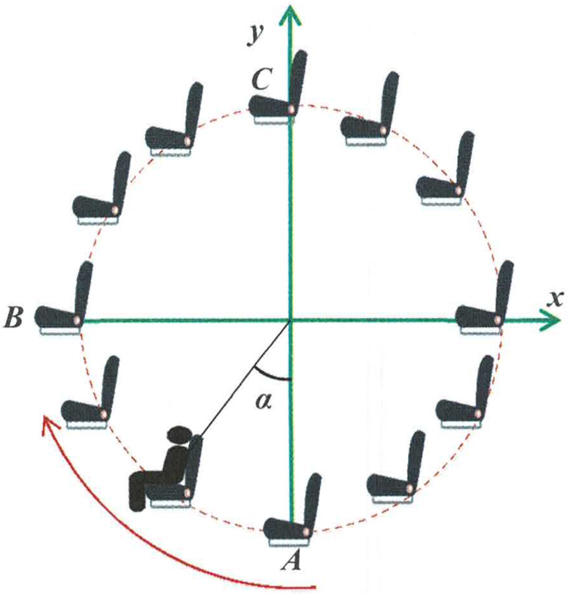
תרשים א

א. שרטט שני גרפים המתארים באופן איכותי את הקואורדינטות x ו-y של מערכת הילד והכיסא, כפונקציה של הזמן במערכת הצירים המתוארת בתרשים ב'. נתון שברגע $t=0$ מערכת הילד-כיסא נמצאת בנקודה A.

ב. האם במהלך סיבוב הגלגל תאוצת מערכת הילד-כיסא שווה לאפס? אם השבת בכן, הסבר את תשובתך, ואם השבת בלא, בטא את התאוצה באמצעות נתוני הבעיה (כולם או חלקם).

נתון: $R=60\,\text{m}$,$M=120\,\text{kg}$ והמהירות הזוויתית של הגלגל היא $0.2\,\text{rad/s}$.

ג. חשב את הכוח שציר הכיסא מפעיל על מערכת הילד-כיסא בנקודות A, B ו-C.



פתרון:

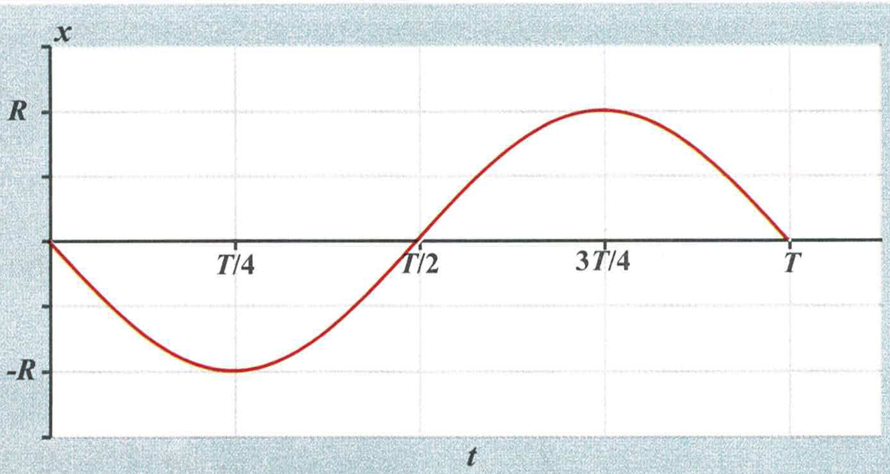
א. לאחר זמן t מתחילת התנועה (ב-$t=0$) הזווית הנוצרת בין הרדיוס לכיוון השלילי של ציר y היא $\alpha=\omega t=\frac{2\pi}{T}t$ (ראה תרשים).

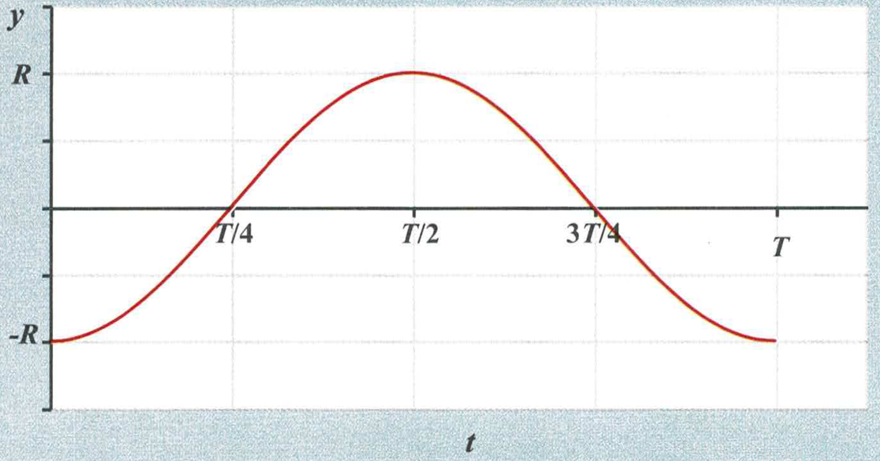
מתקיים:

$$x(t)=-R\sin\alpha=-R\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y(t)=-R\cos\alpha=-R\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

הגרפים הבאים מתארים שתי פונקציות אלה הם הבאים:

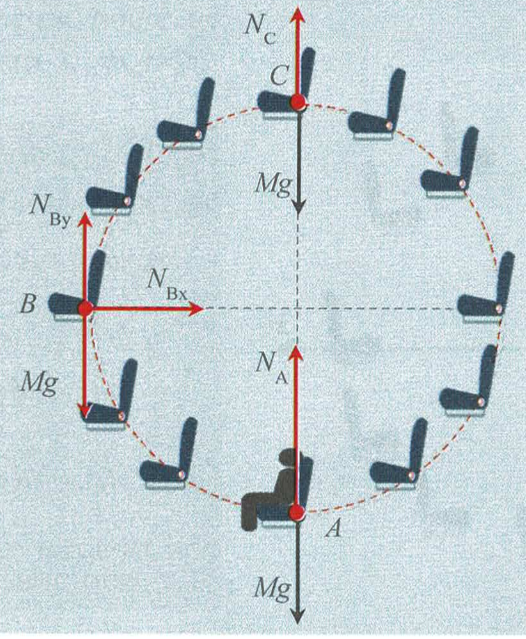




ב. מכיוון שהגלגל מסתובב במהירות קבועה, יש למערכת הילד-כיסא תאוצה צנטריפטלית הנתונה על ידי:

$$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

ג. בתרשים הבא מתוארים הכוחות הפועלים בנקודות A, B ו-C על המערכת ילד-כיסא, כאשר N מתאר את הכוח שציר הכיסא מפעיל על מערכת זו.



לחישוב N_A נעזר בחוק השני של ניוטון. בהתאם לחוק זה, בנקודה A מתקיים:

$$N_A - Mg = M\omega^2 R$$

$$\Rightarrow N_A = M\left(\omega^2 R + g\right) = 120\left[(0.2)^2 60 + 10\right] = 1{,}488\,\text{N}$$

בנקודה B יש לכוח שהציר מפעיל על המערכת ילד-כיסא שני רכיבים: N_{Bx} ו- N_{By}. בכיוון ציר y קיים שווי משקל, לכן נקבל:

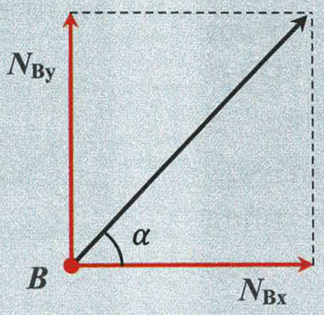
$$N_{By} = Mg = 1200\,\text{N}$$

בכיוון ציר x מתקיים, שוב על פי החוק השני של ניוטון:

$$\Sigma F_c = M\omega^2 R$$

$$\Rightarrow N_{Bx} = M\omega^2 R = 120(0.2)^2 60 = 288\,\text{N}$$

לחישוב הכוח השקול שציר הכיסא מפעיל בנקודה זו, ניעזר בתרשים הבא:



מתקיים:

$$N_B = \sqrt{1200^2 + 288^2} = 1{,}234\,\text{N}$$

$$\tan\alpha = \frac{1200}{288} \quad \Rightarrow \alpha = 76.5^\circ$$

בנקודה C מתקיים, על פי החוק השני של ניוטון (ראה תרשים):

$$\Sigma F_c = M\omega^2 R$$

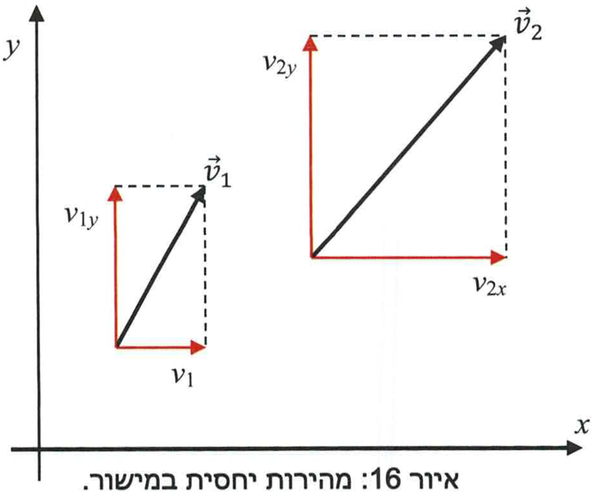
$$\Rightarrow Mg - N_C = M\omega^2 R$$

$$\Rightarrow N_C = M\left(g - \omega^2 R\right) = 120\left[10 - (0.2)^2 60\right] = 912\,\text{N}$$

9. מהירות יחסית במישור

נתונים שני גופים 1 ו-2 הנעים במישור, ונתון שברגע מסוים t מהירות הגוף הראשון היא $\vec{v}_1$ ושמהירות הגוף השני היא $\vec{v}_2$ (שתי המהירויות ביחס לקרקע), כפי שמתואר באיור 16.

ניתן למצוא את מהירותו של אחד הגופים ביחס לגוף השני, כלומר ביחס למערכת יחוס הקשורה לגוף השני. על מנת לעשות זאת יש לבחור מערכת צירים xy, ולפרק את מהירויות שני הגופים לרכיביהם: v_{1x}, v_{1y}, v_{2x} ו- v_{2y} (ראה איור 16). באמצעות רכיבים אלה ניתן לחשב את מהירותו של כל אחד משני הגופים ביחס לגוף האחר בכיוון כל אחד משני הצירים.



איור 16: מהירות יחסית במישור.

מהירותו של גוף 2 ביחס לגוף 1 בכיוון ציר x $\left(v_{21x}\right)$ נתונה על ידי:

$$v_{21x}=v_{2x}-v_{1x} \tag{73}$$

ומהירותו של גוף 2 ביחס לגוף 1 בכיוון ציר y $\left(v_{21y}\right)$ נתונה על ידי:

$$v_{21y}=v_{2y}-v_{1y} \tag{74}$$

שני הקשרים (73) ו-(74) הם הרכיבים בכיוון x ו- y של המשוואה הווקטורית הבאה:

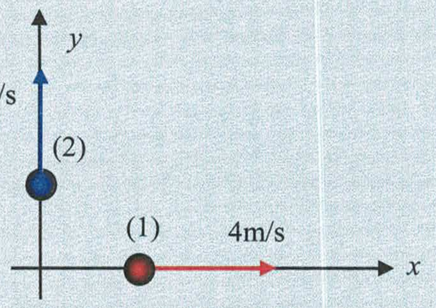
$$\vec{v}_{21}=\vec{v}_2-\vec{v}_1 \tag{75}$$

ברור שמתקיים $\vec{v}_{12}=-\vec{v}_{21}$.

דוגמאות חישוביות למהירות היחסית במישור

דוגמה 1

במערכת הצירים שלפניך מתוארים שני גופים 1 ו-2. גוף 1 נע במהירות של 4m/s בכיוון החיובי של ציר x וגוף 2 נע במהירות של 3m/s בכיוון החיובי של ציר y.



א. חשב $\vec{v}_{21}$.

ב. חשב $\vec{v}_{12}$.

ג. תאר את תנועת גוף 2 ביחס לגוף 1.

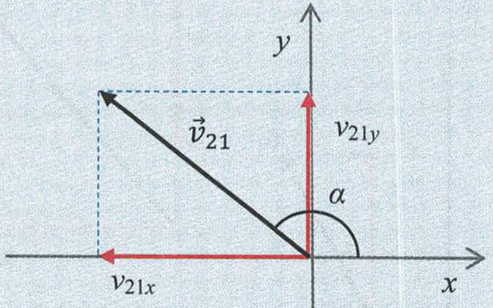
פתרון:

א. מתקיים:

$$\left(v_{21}\right)_x=v_{2x}-v_{1x}=0-4=-4\,\text{m/s}$$

$$\left(v_{21}\right)_y=v_{2y}-v_{1y}=3-0=3\,\text{m/s}$$

בתרשים הבא מתוארים רכיבי המהירות היחסית:



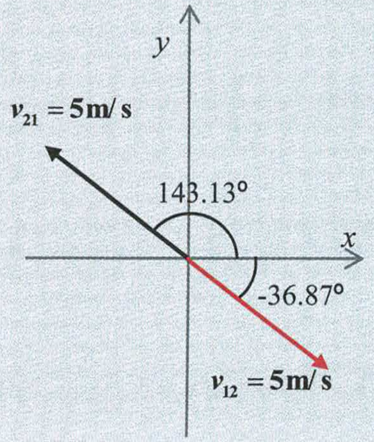
לכן נקבל:

$$v_{21}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5\,\text{m/s}$$

$$\tan\alpha=\frac{\left(v_{21}\right)_y}{\left(v_{21}\right)_x}=\frac{3}{-4}$$

כאשר α היא הזווית המתוארת בתרשים למעלה. הפתרון של המשוואה האחרונה הוא: $\alpha=143.13^\circ$.

ב. מכיוון שמתקיים ש- $\vec{v}_{12}=-\vec{v}_{21}$, נקבל שמהירות גוף 1 ביחס לגוף 2 היא 5m/s בזווית $\beta=-36.87^\circ$ כפי שמתואר בתרשים הבא.



ג. גוף 2 ביחס לגוף 1 נע במהירות שגודלה 5m/s בכיוון היוצר זווית בת 143.13° עם הכיוון החיובי של ציר x.

דוגמה 2

נתון משטח אופקי עליו מסומנת מערכת צירים xy, ושתי מכוניות צעצוע. המכונית ראשונה יכולה לנסוע במהירות שגודלה 20cm/s ביחס למשטח והשנייה במהירות שגודלה 50cm/s (ביחס למשטח גם כן). מכוונים את המכונית 1 בכיוון החיובי של ציר x.

א. באיזה כיוון יש לכוון את המכונית 2 על מנת שתנוע בכיוון החיובי של ציר ה- y

ביחס למכונית 1.

ב. חשב את מהירותה של מכונית 2 ביחס למכונית 1 במקרה המתואר בסעיף הקודם.

פתרון:

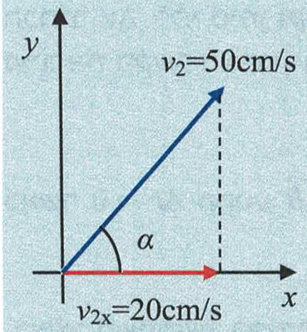
א. על מנת שמהירות מכונית 2 ביחס למכונית 1 תהיה בכיוון החיובי של ציר y, צריך להתקיים:

$$(v_{21})_x = v_{2x} - v_{1x} = 0$$
$$\Rightarrow v_{2x} = v_{1x} = 20\,\mathrm{cm/s}$$

לכן יש לכוון את מכונית 2 בזווית α ביחס לציר x כך שמתקיים $v_{2x} = 20\,\mathrm{cm/s}$, כפי שמתואר בתרשים הבא:

הזווית α נתונה על ידי:

$$\cos\alpha = \frac{20}{50} \quad \Rightarrow \alpha = 21.8^{\circ}$$



ב. מתקיים:

$$(v_{21})_x = v_{2x} - v_{1x} = 0$$
$$(v_{21})_y = v_{2y} - v_{1y} =$$
$$= 50\sin(21.8) - 0 = 18.57\,\mathrm{cm/s}$$

נספח: מציאת הביטוי לתאוצה הצנטריפטלית בתנועה מעגלית קצובה

באיור 17א מתואר גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה ובמהירות קווית שגודלה v במעגל שרדיוסו R. בתרשים מתוארות שתי נקודות, A ו-B על מסלול הגוף הקרובות זו לזו. הגוף עובר מ-A ל-B בפרק זמן שגודלו Δt, ובמהלך פרק זמן זה הוא חולף על פני זווית מרכזית שגודלה $\Delta\theta$ (ראה איור 17א). נסמן את מהירות הגוף בנקודה A ב-$\vec{v}_A$ ואת מהירות הגוף בנקודה B ב-$\vec{v}_B$. שתי המהירויות האלה מכוונות בכיוון המשיקים למסלול המעגלי בנקודות A ו-B (ראה איור 17א), ומכיוון שהתנועה המעגלית קצובה מתקיים: $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B|$. על פי הגדרת התאוצה במישור מתקיים:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (76)$$

הביטוי האחרון משמש לחישוב גודל וכיוון התאוצה. מכיוון שכיוון התאוצה בתנועה מעגלית קצובה ידוע (הוא תמיד בכיוון מרכז הסיבוב), הביטוי (76) ישמש אותנו לחישוב גודל התאוצה הצנטריפטלית בלבד.

על מנת לחשב את גודל התאוצה נחשב ראשית את גודלו של וקטור ההפרש: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ במשוואה (76). לשם כך נצטרך למצוא קודם את הזווית α בין שני הווקטורים $\vec{v}_B$ ו-$\vec{v}_A$ באיור 17א.

במצולע $OACB$ באיור 17א מתקיים $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OBC = 90^{\circ}$. מכיוון שסכום הזוויות של מצולע זה הוא 360°, נקבל $\sphericalangle ACB = 180^{\circ} - \Delta\theta$. הזווית α היא המשלימה לזווית $\sphericalangle ACB$ ל-180° (ראה איור 17א). מכאן נקבל ש-$\alpha = \Delta\theta$.

באיור 17ב שרטטנו את שני הווקטורים $\vec{v}_A$ ו-$\vec{v}_B$ כך שהם יוצאים מאותה נקודה (הנקודה k) והזווית ביניהם $\Delta\theta$. וקטור ההפרש $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ מוצג באיור זה כווקטור המחבר את הקצה ℓ ל-m (ראה איור 17ב).

מתקיים $\Delta k\ell m \sim \Delta OAB$. מדמיון זה נקבל:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\overline{AB}} = \frac{|\vec{v}|}{R} \qquad (77)$$

מקשר זה נקבל:

$$\Delta v = \frac{v}{R}\overline{AB} \tag{78}$$

הכתיב Δv ללא סימן וקטורי מסמן את גודל הווקטור בלבד.

נציב את הקשר האחרון בהגדרת התאוצה (76), נקבל שגודלה של תאוצת הגוף נתון על ידי:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t} \tag{79}$$

כאשר $\Delta t \to 0$ הקטע $\overline{AB}$ מתקרב לאורך הקשת $\overset{\frown}{AB}$, אותה נסמן ב- Δs, לכן נקבל:

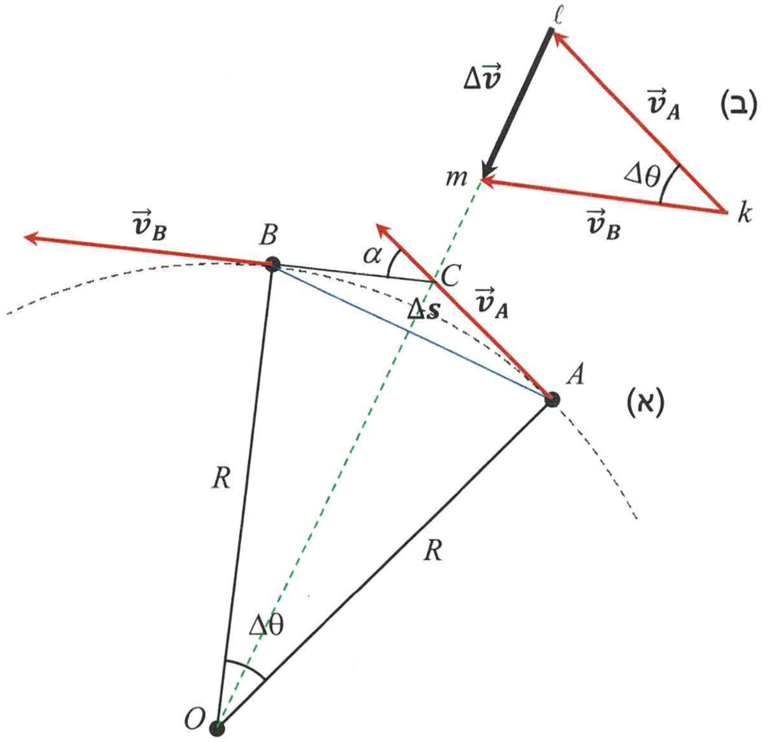
$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\overline{AB}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = v \tag{80}$$

כאשר השתמשנו בהגדרה (60). מהצבת הקשר (80) בקשר (79) נקבל:

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R} \tag{81}$$

תאוצה זו היא התאוצה הצנטריפטלית (a_c), לכן נקבל:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{82}$$


ℓ
$\Delta\vec{v}$
$\vec{v}_A$
(ב)
m
$\Delta\theta$
k
$\vec{v}_B$
$\vec{v}_B$
B
α
C
Δs
$\vec{v}_A$
A
(א)
R
R
$\Delta\theta$
O

איור 17: תרשים לחישוב התאוצה הצנטריפטלית בתנועה מעגלית.

סיכום פרק 8

1. תנועה במישור היא תנועה שבה המסלול שלאורכו נע הגוף נמצא במישור מסוים. קיימות הרבה תנועות סביבנו שנחשבות לתנועה במישור. אחת החשובות מבניהן היא תנועת גוף הנזרק על פני כדור הארץ בזווית מסוימת. במקרה זה מסלול הגוף הוא קו עקום שכל נקודותיו נמצאות במישור אחד הניצב לפני הקרקע. גם תנועה מעגלית היא תנועה במישור. במקרה זה כל הנקודות שעל מסלולו של הגוף נמצאות במישור מסוים, ומרחקן מנקודה קבועה הנמצאת במישור זה הוא קבוע.
2. מיקומו של גוף הנע במישור, בזמן מסוים t נקבע על ידי שיעורי x ו- y של הנקודה בה נמצא הגוף בזמן זה במערכת צירים xy שנבחרה.
3. מיקומו של הגוף בזמן מסוים t נקבע גם על ידי וקטור המיקום, שהוא וקטור המתחיל מראשית הצירים ומסתיים במיקומו של הגוף בזמן הנדרש. וקטור זה מסומן ב- $\vec{r}$. אורכו של וקטור המיקום מבטא מרחק הנקודה מהראשית וכיוונו מבטא את הזווית בין וקטור המיקום והכיוון החיובי של ציר x.
4. אם נתונים שיעורי המיקום x ו- y אז מתקיים:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ו- } \tan\alpha = \frac{y}{x}.$$

ואם נתון וקטור המיקום $\vec{r}$ (גודל וכיוון), נקבל: $x = r\cos\alpha$ ו- $y = r\sin\alpha$.
5. וקטור ההעתק במישור בין שתי נקודות A ו- B עבור גוף הנע במישור הוא הווקטור המחבר את הנקודה A עם הנקודה B. וקטור ההעתק מסומן ב- $\Delta\vec{r}$. אורכו של וקטור זה מבטא את מרחק הנקודה B מהנקודה A, וכיוונו מבטא את הזווית שווקטור זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר x.
6. המהירות הממוצעת של הגוף, הנע במישור, בפרק הזמן $\Delta t = t_2 - t_1$ מוגדרת כמהירות הקבועה (גודל וכיוון) אשר אם הגוף ינוע בה העתקו יהיה זהה להעתק הקודם (כלומר הוא יגיע, לאורך קו ישר, לאותו מקום באותו פרק זמן). המהירות הממוצעת מסומנת ב- $\bar{v}$, ומכיוון שהיא גודל וקטורי רושמים $\vec{\bar{v}}$. על פי הגדרת המהירות הממוצעת מתקיים: $\vec{\bar{v}} = \Delta\vec{r} / \Delta t$. על פי הגדרה זו גודלה של המהירות הממוצעת הוא $\Delta r / \Delta t$ וכיוונה בכיוון וקטור ההעתק $\Delta\vec{r}$. במערכת הצירים xy קיימים למהירות הממוצעת שני רכיבים, האחד בכיוון ציר x והאחר בכיוון ציר y. מתקיים: $\bar{v}_x = \frac{\Delta r_x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ו- $\bar{v}_y = \frac{\Delta r_y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$.
7. המהירות הרגעית של גוף הנע במישור מוגדרת כמהירות של הגוף ברגע נתון. המהירות הרגעית מסומנת באות v ומכיוון שמהירות זו במישור היא וקטור רושמים $\vec{v}$. גודלה של מהירות זו נתון על ידי הביטוי: $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ וכיוונה בזמן מסוים הוא בכיוון המשיק למסלול הגוף בזמן זה.
8. מכיוון שעל הגוף הנע במסלול עקום במישור פועל בכל נקודות המסלול, כוח היוצר זווית עם המסלול (עם המשיק למסלול) נקבל, על פי החוק השני של ניוטון, שלגוף הנע במישור במסלול עקום יש תאוצה בכל נקודות המסלול. כיוון התאוצה זו יוצר זווית ביחס למשיק בכל נקודות המסלול.
9. נהוג לפרק את התאוצה $\vec{a}$ בתנועה במישור לרכיבים ביחס למשיק למסלול; הראשון בכיוון המשיק, אותו נסמן ב- $a_\parallel$ (מקביל למשיק), והשני בכיוון ניצב למשיק, שיסומן ב- $a_\perp$. רכיבים אלה של התאוצה ממלאים תפקיד בתנועת הגוף במסלולו במישור. הרכיב $a_\parallel$ הוא גורם לשינוי גודל המהירות אך לא לשינוי כיוונה והרכיב $a_\perp$ הוא גורם לשינוי כיוון המהירות אך לא לשינוי גודלה.
10. כאשר זורקים גוף על פני כדור הארץ בזווית כלפי מעלה, הגוף נע במסלול עקום עד שהוא פוגע בקרקע. תנועה זו נחשבת לתנועה במישור כי מסלול תנועתו של הגוף נמצא במישור אחד הניצב לאופק.
11. לתיאור תנועת גוף שנזרק בזמן $t = 0$ במהירות התחלתית v_0 ובזווית α_0 ביחס לקרקע, נבחר מערכת צירים xy הנמצאת במישור תנועת הגוף. ציר x מקביל לאופק וכיוונו החיובי בכיוון תנועת הגוף, ציר y ניצב לאופק וכיוונו החיובי כלפי מעלה, והראשית בנקודה ממנה נזרק הגוף. במערכת זו מתקיים: $a_x = 0,\ a_y = -g$

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha_0 \\ v_y = v_0\sin\alpha_0 - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha_0)t \\ y = (v_0\sin\alpha_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

על פי קשרים אלה, הגוף הנזרק בזווית מתקדם בכיוון האופקי במהירות קבועה ובכיוון אנכי בתאוצה קבועה.

12. מסלולו של הגוף במקרה זה נתון על ידי הביטוי:

$$y(x) = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$$

ביטוי זה מתאר פרבולה.

13. הזריקה האופקית היא מקרה פרטי של זריקה משופעת. בזריקה האופקית מתקיים $\alpha = 0$, כלומר הגוף נזרק במהירות התחלתית v_0 במקביל לאופק. במקרה זה מתקיים במערכת הצירים הנ"ל:

$$a_x = 0,\ a_y = -g$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = vt \\ y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

ומשוואת המסלול במקרה זה מתוארת על ידי הביטוי: $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$.

14. אם גוף נע במישור בהשפעת כוח קבוע, אז קיימים המקרים הבאים:

א. אם כיוון המהירות ההתחלתית מנוגד לכיוון הכוח $\vec{F}$, הגוף נע בקו ישר ומאט את מהירותו בקצב קבוע עד לעצירה רגעית, ולאחר מכן הוא חוזר בתאוצה קבועה, כמו בזריקה אנכית כלפי מעלה בשדה הכובד.

ב. אם כיוון המהירות ההתחלתית בכיוון הכוח $\vec{F}$, הגוף נע בקו ישר בתאוצה קבועה בכיוון הכוח, כמו בזריקה אנכית כלפי מטה בשדה הכובד.

ג. אם המהירות ההתחלתית יוצרת זווית כל שהיא עם כיוון הכוח, נקבל תנועה כמו בזריקה בזווית בשדה הכובד. הגוף נע במישור המכיל את שני הווקטורים $\vec{v}_0$ ו- $\vec{F}$ במסלול שהוא פרבולה.

15. תנועה מעגלית היא תנועה שבה הגוף נע במסלול שכל נקודותיו נמצאות במישור, ומרחקן מנקודה קבועה הנמצאת במישור זה הוא קבוע. הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל ומסומנת באות C והמרחק הקבוע נקרא מחוג או רדיוס המעגל ומסומן באות R.

16. מיקום הגוף בזמן מסוים t נקבע בתנועה מעגלית באחת משתי דרכים:

א. על ידי הקואורדינטות x ו- y של הנקודה שבה נמצא הגוף בזמן המבוקש.

ב. על ידי וקטור המיקום $\vec{r}$ שהוא וקטור שזנבו נמצא בראשית הצירים (מרכז המעגל) וראשו בנקודה שבה נמצא הגוף. אורכו של וקטור זה מייצג את המרחק בין הנקודה שבה נמצא הגוף ובין הראשית, וכיוונו מייצג את הזווית בין וקטור זה ובין הכיוון החיובי של ציר x. מכיוון שכל הנקודות על מסלול הגוף בתנועה מעגלית נמצאות באותו מרחק מראשית הצירים, מספיק בשיטה זו לקבוע את ערכה של הזווית θ על מנת לקבוע את מיקומו של הגוף.

17. מוסכם שהזווית θ נמדדת תמיד ביחס לכיוון החיובי של ציר x, והיא נחשבת חיובית כאשר הגוף מסתובב מציר x נגד כיוון מחוגי השעון ושלילית כאשר הגוף מסתובב מציר x בכיוון תנועת מחוגי השעון. זווית זו נמדדת במעלות (מעלות קשת) או ברדיאנים (rad).

18. **המהירות הקווית** של גוף הנע בתנועה מעגלית מוגדרת כקצב שינוי הדרך אותה עובר הגוף במהלך תנועתו. בתנועה מעגלית קצובה מהירות זו נתונה על ידי הביטוי: $v = \Delta s / \Delta t$, כאשר Δs הוא אורך הקשת אותה עבר הגוף בפרק הזמן Δt.

19. **המהירות הזוויתית** של הגוף הנע בתנועה מעגלית מוגדרת כקצב שינוי הזווית המרכזית במהלך תנועת הגוף. בתנועה מעגלית קצובה מהירות זו נתונה על ידי הביטוי: $\omega = \Delta\theta / \Delta t$ כאשר $\Delta\theta$ היא הזווית המרכזית אותה עבר הגוף בפרק הזמן Δt. מהירות זו נמדדת ביחידות rad/s.

20. המהירות הקווית והזוויתית של גוף הנע בתנועה מעגלית קשורות זו בזו, כך שמתקיים הקשר: $v = R\omega$.

21. לתאוצה של גוף הנע בתנועה מעגלית יש בכל נקודה שני רכיבים והם: $a_\parallel$ בכיוון המשיק למעגל בנקודה בה נמצא הגוף, ו- $a_\perp$ בכיוון הניצב למעגל (למשיק) בנקודה זו. מכיוון

שהניצב למשיק במעגל מכוון בכיוון מרכז המעגל (בכיוון הרדיוס), $a_\perp$ נקרא גם תאוצה צנטריפטלית (לכיוון המרכז) ומסומנת במקרה זה ב-a_c, וגם תאוצה רדיאלית (בכיוון הרדיוס) ומסומנת ב-a_r. גודלה של התאוצה הצנטריפטלית של גוף הנע במסלול מעגלי בנקודה מסוימת נתונה על ידי הביטוי: $a_\perp = v^2 / R = \omega^2 R$.

כאשר v היא מהירותו הקווית של הגוף בנקודה זו ו-ω היא מהירותו הזוויתי בנקודה זו.

22. **זמן המחזור** בתנועה מעגלית קצובה הוא הזמן הדרוש לגוף להשלים סיבוב אחד שלם. גודל זה מסומן באות T. מתקיים $T = 2\pi R / v = 2\pi / \omega$.

23. **התדירות** בתנועה מעגלית קצובה היא מספר הסיבובים שהגוף משלים ביחידת זמן אחת. גודל זה מסומן באות f, מהמילה frequency. מתקיים: $f = 1/T = \omega / 2\pi$.

24. בתנועה מעגלית קצובה פועל על הגוף כוח המכוון לכיוון מרכז הסיבוב. כוח זה נקרא כוח צנטריפטלי ומסומן ב-F_c (גם מסומן ב-F_r או $F_\perp$). גודלו של כוח זה נתון על ידי: $\Sigma F_c = mv^2 / R = m\omega^2 R$, כאשר m היא מסת הגוף, v מהירותו הקווית, R רדיוס הסיבוב ו-ω מהירותו הזוויתית.

25. מקור הכוח הצנטריפטלי הפועל על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה תלוי בבעיה עצמה. לדוגמה, בתנועת הירח סביב כדור הארץ הכוח הצנטריפטלי הפועל על הירח הוא הכוח הגרביטציוני שכדור הארץ מפעיל על הירח. בתנועת המעגלית של האלקטרון סביב הפרוטון באטום המימן, הכוח הצנטריפטלי הפועל על האלקטרון הוא הכוח החשמלי שהפרוטון מפעיל על האלקטרון.

תרגילים ובעיות – פרק 8

1. גדלים קינמטיים בתנועה במישור

.1

א. תן שלוש דוגמאות לתנועה במישור.

ב. תאר שתי דרכים לקביעת מיקומו של גוף הנע במישור.

ג. הראה איך ניתן לעבור בין שתי הדרכים לקביעת מיקומו של גוף הנע במישור, דרכים שתיארת בסעיף הקודם.

.2

חשב (ביחס לראשית הצירים) את וקטור המיקום בנקודות הבאות הנתונות במערכת צירים xy:

א. $(4\,\text{m},3\,\text{m})$.

ב. $(-10\,\text{m},30\,\text{m})$.

ג. $(-6\,\text{m},-12\,\text{m})$.

.3

חשב את קואורדינטות המיקום (x,y) של הנקודות המוגדרות על ידי וקטורי המיקום הבאים:

א. $r=20\,\text{cm}$ ו- $\alpha=30^{\circ}$.

ב. $r=7\,\text{m}$ ו- $\alpha=60^{\circ}$.

ג. $r=10\,\text{m}$ ו- $\alpha=150^{\circ}$.

ד. $r=8\,\text{m}$ ו- $\alpha=-40^{\circ}$.

ה. $r=6\,\text{m}$ ו- $\alpha=210^{\circ}$.

.4

חשב את וקטור ההעתק: $\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$ בין הנקודות הבאות:

א. $A:(30\,\text{cm},30\,\text{cm})$ ו- $B:(50\,\text{cm},80\,\text{cm})$.

ב. $A:(2\,\text{m},4\,\text{m})$ ו- $B:(8\,\text{m},8\,\text{m})$.

ג. $A:(2\,\text{m},4\,\text{m})$ ו- $B:(-6\,\text{m},12\,\text{m})$.

ד. $A:(20\,\text{m},15\,\text{m})$ ו- $B:(28\,\text{m},8\,\text{m})$.

.5

גוף נע לאורך מסלול הנמצא במישור מסוים. בזמן $t=0$ הגוף עובר בנקודה $(2\,\text{m},1\,\text{m})$ וב- $t=4\,\text{s}$ הגוף עובר בנקודה $(10\,\text{m},7\,\text{m})$.

א. הגדר מהירות ממוצעת עבור גוף הנע במישור.

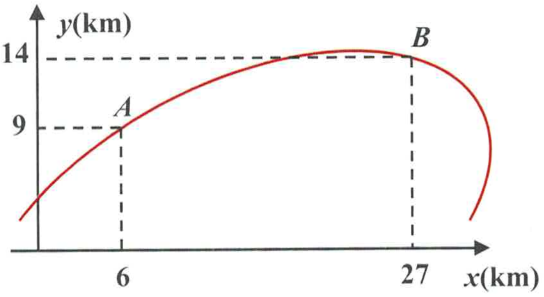
ב. חשב את העתק הגוף בפרק הזמן הנתון (בין $t=0$ לבין $t=4\,\text{s}$).

ג. חשב את המהירות הממוצעת (גודל וכיוון) של הגוף בפרק הזמן הנתון.

ד. חשב בשתי שיטות שונות את רכיבי המהירות הממוצעת בכיווני הצירים x ו- y.

.6

בתרשים שלפניך מתואר חלק ממסלולו של גוף הנע במישור:



ב- $t=0$ הגוף היה בנקודה A ובזמן $t=3\,\text{h}$ הגוף עבר בנקודה B. חשב את:

א. וקטורי המיקום $\vec{r}_A$ ו- $\vec{r}_B$.

ב. רכיבי וקטור ההעתק מ- A אל B.

ג. וקטור ההעתק מ- A אל B.

ד. המהירות הממוצעת (גודל וכיוון) של הגוף בתנועתו מ- A אל B.

ה. רכיבי המהירות הממוצעת בתנועת הגוף מ- A אל B.

.7

גוף נע במסלול עקום הנמצא במישור.

א. הגדר את תאוצת הגוף ורשום את הביטוי המתמטי לחישוב תאוצת הגוף בזמן מסוים.

ב. נהוג לפרק את תאוצת הגוף הנע במישור לשני רכיבים, הראשון $a_{\parallel}$ המקביל למסלול והשני $a_{\perp}$ הניצב למסלול. הסבר מהי השפעת כל אחד משני רכיבים אלה על תנועת הגוף.

ג. האם יתכן מצב שבו גוף נע במישור במסלול עקום, ומתקיים עבורו $a_{\perp}=0$? הסבר את תשובתך.

8.

קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואילו אינן נכונות. הסבר את קביעתך בכל אחד מהמקרים.

א. כיוונה של המהירות הממוצעת של גוף, בפרק זמן מסוים, הוא בכיוון וקטור העתק הגוף בפרק זמן זה.

ב. בכל הנקודות לאורך המסלול של גוף הנע במישור, כיוון המהירות הוא בכיוון המשיק למסלול בנקודות אלה.

ג. כיוון תאוצת גוף הנע במישור הוא בכיוון מהירות הגוף.

ד. כיוון תאוצת גוף הנע במישור הוא בכיוון המהירות הממוצעת של הגוף.

ה. כאשר גוף נע במסלול עקום במישור, כיוון תאוצתו בכל נקודות המסלול יוצר זווית ביחס למסלול בנקודות אלה (כלומר ביחס למשיק למסלול בנקודות אלה).

ו. כיוון התאוצה במישור הוא בכיוון הכוח השקול הפועל על הגוף.

2. זריקה בזווית כלפי מעלה

9.

ברגע $t=0$ נזרק מהקרקע גוף במהירות של $60\,\mathrm{m/s}$ ובזווית 30° ביחס לאופק. נתון שהתנגדות האוויר זניחה.

א. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע לגובה המקסימלי.

ב. חשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף (ביחס לקרקע).

ג. חשב את הזמן שבו הגוף חוזר לקרקע.

ד. חשב את טווח תנועת הגוף.

ה. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

ו. חשב את מהירות הגוף בזמנים: $2\mathrm{s}$ ו-$5\mathrm{s}$.

10.

גוף נזרק מגגו של בניין שגובהו $60\,\mathrm{m}$ במהירות התחלתית של $25\,\mathrm{m/s}$ ובזווית בת 53.13° ביחס לאופק. הזמן שבו הגוף נזרק נבחר להיות $t=0$.

בחר מערכת הצירים xy במישור תנועת הגוף, כך שציר x אופקי, ציר y אנכי כיוונו החיובי כלפי מעלה וראשית מערכת הצירים בנקודת הזריקה. הנח שהתנגדות האוויר זניחה.

א. בטא את קואורדינטות מיקום הגוף (x ו-y) כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף (ביחס לגג הבניין).

ג. חשב את הזמן שבו הגוף פוגע בקרקע.

ד. חשב את קואורדינטות הנקודה שבה הגוף פוגע בקרקע.

ה. חשב את המהירות (גודל וכיוון) שבה הגוף פוגע בקרקע.

ו. חשב את העתק הגוף מ-$t=0$ ועד הזמן שבו הוא פוגע בקרקע.

ז. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף מ-$t=0$ ועד הזמן שבו הוא פוגע בקרקע.

11.

גוף נזרק מהקרקע במהירות שגודלה $40\,\mathrm{m/s}$ ובזווית בת 34° ביחס לאופק. במרחק $10\,\mathrm{m}$ מנקודת הזריקה נמצאת חומה שגובהה $6\,\mathrm{m}$ ביחס לפני הקרקע. בדוק האם הגוף פוגע בחומה. אם כן, מצא באיזה גובה הוא פוגע בחומה, ואם לא מצא את גובהו מעל החומה ברגע שהוא עובר מעליה.

12.

כדורגלן בועט בכדור המונח על הקרקע. כתוצאה מכך הכדור מקבל מהירות התחלתית של $25\,\mathrm{m/s}$ בכיוון היוצר זווית בת 60° ביחס לקרקע. הכדור פוגע בבניין הנמצא במישור תנועת הכדור, בנקודה הנמצאת בגובה $10\,\mathrm{m}$ ביחס לפני הקרקע. הזנח את התנגדות האוויר.

א. חשב את הזמן הדרוש לכדור להתנגש בבניין אם הוא מתנגש בבניין במהלך:
  1) עלייתו.
  2) ירידתו.

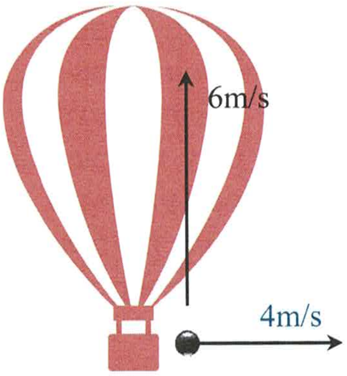
ב. חשב את מרחק הבניין בכל אחד משני המקרים בסעיף הקודם.

ג. חשב את מהירות פגיעת הכדור בבניין בכל אחד משני המקרים המוזכרים בסעיף א'.

13.

כדור פורח עולה בכיוון אנכי כלפי מעלה

במהירות קבועה שגודלה 6m/s ביחס לקרקע, כפי שמתואר בתרשים. ברגע מסוים ($t=0$), כאשר הכדור הפורח נמצא בגובה 80m מעל הקרקע, נזרק ממנו גוף במהירות 4m/s בכיוון אופקי ביחס לכדור הפורח (ראה תרשים).



בחר מערכת צירים xy קבועה ביחס לקרקע הנמצאת במישור תנועת הגוף, שבה ציר x אופקי, ציר y אנכי כלפי מעלה וראשית הצירים נמצאת על הקרקע בנקודה הנמצאת מתחת לנקודה שממנה הגוף נזרק.

א. חשב את רכיבי מהירות הגוף ביחס לקרקע.

ב. בטא את קואורדינטות המיקום של הגוף כפונקציה של הזמן במערכת הצירים שנבחרה.

ג. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע לגובה המקסימלי ביחס לקרקע, וחשב גובה זה.

ד. חשב את הזמן שבו הגוף פוגע בקרקע.

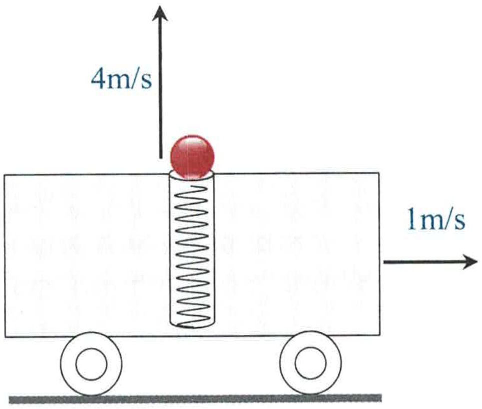
ה. חשב את מיקום נקודת הפגיעה של הגוף בקרקע.

ו. חשב את גודל וכיוון המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

14.

בתרשים שלפניך מתוארת עגלה הנעה על משטח אופקי בקו ישר ובמהירות קבועה שגודלה 1m/s.

בעגלה נמצא צינור שכיוונו מאונך לפני המשטח. בתוך הצינור נמצא קפיץ מכווץ המהודק בקצהו התחתון בתחתית הצינור ומעליו מונח כדור קטן. ברגע מסוים ($t=0$) במהלך תנועת העגלה הקפיץ משתחרר. כתוצאה מכך הכדור מקבל מהירות התחלתית של 4m/s בכיוון מאונך כלפי מעלה ביחס לעגלה.



בחר מערכת צירים קבועה ביחס לקרקע ונמצאת במישור תנועת הכדור, שבה ציר x אופקי, ציר y אנכי כלפי מעלה והראשית בנקודה ממנה הכדור השתחרר מהקפיץ, וענה על השאלות הבאות:

א. בטא את רכיבי מהירות הכדור כפונקציה של הזמן ביחס לקרקע (ביחס למערכת xy).

ב. בטא את מיקום הכדור ואת מיקום הפתח העליון של הצינור, כפונקציה של הזמן במערכת הצירים (xy) שנבחרה.

ג. חשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הכדור ביחס למישור האופקי שבו היה ב- $t=0$.

ד. חשב את הזמן שבו הכדור חוזר למישור האופקי שבו היה ב-$t=0$.

ה. מצא את מיקום הכדור ואת מיקום הפתח העליון של הצינור בזמן שחישבת בסעיף הקודם.

ו. מהי המסקנה מהתשובות שקיבלת בסעיף הקודם.

15.

קבע מהי צורת מסלולו של גוף שעבורו מתקיים:

א. כיוון וקטור המיקום קבוע בכל נקודות המסלול.

ב. גודלו של וקטור המיקום קבוע בכל נקודות המסלול.

ג. רכיב מהירות הגוף בכיוון אחד הצירים קבוע והרכיב בכיוון הציר האחר (שהוא ניצב לציר הראשון) משתנה בקצב קבוע.

.16

גוף נע במישור בתאוצה קבועה (גודל וכיוון). האם בהכרח הגוף נע בקו ישר? הסבר את תשובתך או תן דוגמה.

.17

האם קיימת נקודה על מסלולו של גוף הנזרק בזווית כלפי מעלה שבה:

א. מהירותו מתאפסת? הסבר.
ב. תאוצתו מתאפסת? הסבר.
ג. מהירותו מקבילה לתאוצתו? הסבר.
ד. תאוצתו ניצבת למהירותו? הסבר.

3. זריקה אופקית

.18

גוף נזרק מגגו של בניין שגובהו 20m במהירות אופקית שגודלה 15m/s.

בחר מערכת צירים xy הנמצאת במישור תנועת הגוף, כך שציר x אופקי, ציר y אנכי כלפי מעלה וראשית הצירים במיקום הגוף ברגע הזריקה $(t=0)$, וענה על השאלות הבאות:

א. בטא את הקואורדינטות x ו-y של הגוף, במהלך תנועתו, כפונקציה של הזמן.
ב. חשב את הזמן שבו הגוף פוגע בקרקע.
ג. חשב את קואורדינטות הנקודה שבה הגוף פוגע בקרקע.
ד. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

.19

גוף נזרק בכיוון אופקי מגגו של בניין במהירות התחלתית שגודלה 20m/s. הגוף פוגע בקרקע בנקודה הנמצאת במרחק אופקי של 60m מתחתית הבניין.

א. חשב את גובה הבניין.
ב. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

.20

גוף נזרק בכיוון אופקי מגובה מסוים במהירות התחלתית של 30m/s.

בחר מערכת צירים xy הנמצאת במישור תנועת הגוף, x אופקי, y אנכי כלפי מטה והראשית בנקודה ממנה נזרק הגוף, ומצא את מיקום הגוף כאשר מתקיים:

א. גודל מהירותו 50m/s.
ב. כיוון המשיק למסלול הגוף הוא 45° מתחת לקו האופקי.

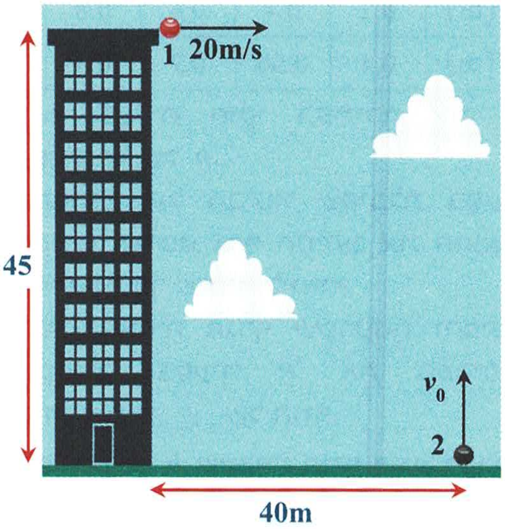
.21

שני גופים 1 ו-2 נזרקים בכיוון אופקי מגגו של בניין, הראשון במהירות v והשני במהירות $2v$. הזנח את התנגדות האוויר.

א. חשב את היחס בין זמני הגעתם לקרקע.
ב. חשב את היחס בין המרחקים האופקיים שהגופים עוברים עד להגעתם לקרקע.
ג. חשב את היחס בין הרכיבים האנכיים של המהירויות בהן הגופים פוגעים בקרקע.

.22

ברגע מסוים $(t=0)$ נזרקים שני גופים, 1 ו-2. הגוף הראשון (1) נזרק אופקית במהירות 20m/s מגגו של בניין שגובהו 45m. הגוף השני (2) נזרק בכיוון אנכי כלפי מעלה, במהירות התחלתית v_{02}, מנקודה הנמצאת על הקרקע במישור תנועת הגוף הראשון ובמרחק 40m מתחתית הבניין (ראה תרשים).



בחר מערכת צירים xy הנמצאת במישור תנועת הגופים כך ש-x אופקי, y אנכי כלפי מעלה והראשית בנקודה ממנה נזרק הגוף הראשון.

א. בטא את קואורדינטות המיקום של הגוף הראשון, x_1 ו-y_1, כפונקציה של הזמן.
ב. חשב את קואורדינטות נקודת התנגשות של הגוף הראשון בקרקע.

ג. בטא את קואורדינטות המיקום של הגוף השני כפונקציה של הזמן. העזר בפרמטר v_{02}, המהירות ההתחלתית של גוף זה.

ד. נתון שגוף 2 מתנגש במהלך תנועתו בגוף 1.

1) מצא את הזמן שבו הגופים מתנגשים זה בזה.

2) חשב את מיקום הנקודה שבה שני הגופים מתנגשים זה בזה.

3) חשב את המהירות ההתחלתית של הגוף השני.

23.

תלמיד עורך את הניסוי הבא:

באמצעות מתקן מיוחד הוא יורה כדור קטן במהירות אופקית v_0 מגובה מסוים h מעל פני הקרקע, ומודד את ההעתק האופקי של הכדור, d, עד לפגיעתו בקרקע.

התלמיד חוזר על אותה פעולה מספר פעמים, ובכל פעם הוא משנה את הגובה h ומודד את d המתקבל, כשהמהירות v_0 קבועה בכל המדידות.

להלן חלק מהתוצאות שקיבל התלמיד:

$h(\text{m})$	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$d(\text{m})$	0.4	0.56	0.7	0.8	0.9

א. בטא בעזרת חוקי הפיזיקה את d כפונקציה של h.

ב. בהסתמך על הביטוי שקיבלת בסעיף הקודם, שרטט גרף המייצג את תוצאות המדידות כך שיהיה לינארי.

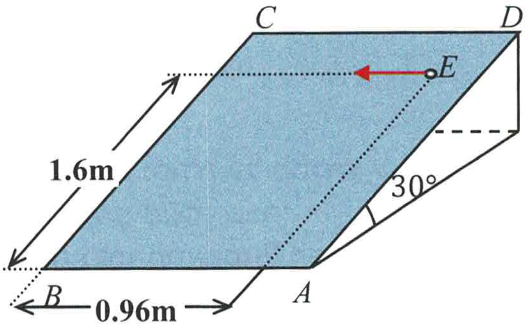
ג. חשב, בעזרת הגרף ששרטטת והביטוי שקיבלת בסעיף א' את המהירות ההתחלתית, v_0, של הגוף.

ד. מהו הגובה h שעבורו הגוף פוגע בקרקע בזווית בת 45°.

24.

בתרשים המוצג לפניך מתואר משטח מלבני $ABCD$ היוצר עם פני הקרקע זווית $\alpha = 30^\circ$ (ראה תרשים).

ברגע $t=0$ נזרק גוף במהירות אופקית של $1\,\text{m/s}$ בכיוון המשטח מנקודה E הנמצאת על המשטח במרחק $0.96\,\text{m}$ מהקצה BC ו- $1.6\,\text{m}$ מהקצה AB. הגוף נע על המשטח ומגיע לצלע AB בנקודה שנסמן ב- F.



בחר מערכת צירים xy במישור המשטח, ציר x אופקי, ציר y בכיוון מורד המשטח וראשית הצירים בנקודה E.

א. בטא את קואורדינטות המיקום x ו- y של הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע לנקודה F.

ג. חשב את מרחקה של הנקודה F מהצלע BC.

ד. חשב את מהירות הגוף בהגיעו לנקודה F.

ה. מהי צורת המסלול של הגוף על המשטח המשופע.

ו. מה צריך להיות גודלה של המהירות ההתחלתית של הגוף על מנת שיגיע לצלע AB בנקודה B.

25.

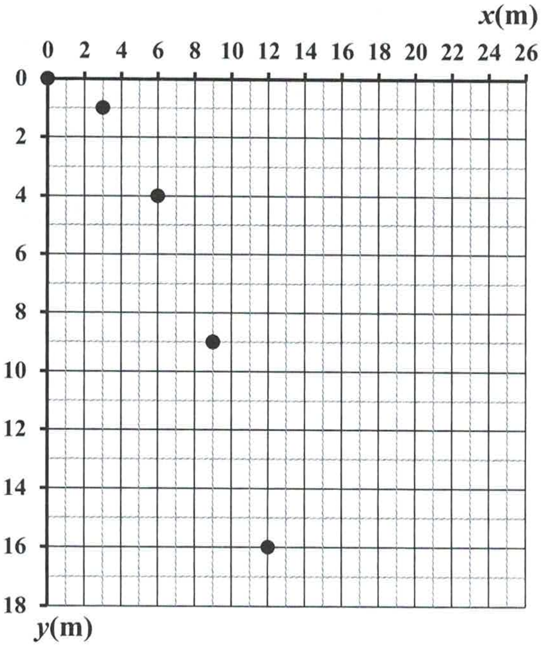
בניסוי שנערך על פניו של כוכב לכת דמיוני, נזרק כדור a בזמן $t=0$ בכיוון אופקי מגובה מסוים מעל פני כוכב הלכת. במערכת הצירים xy המוצגת לפניך מתואר מיקומו של הגוף בזמנים: $t=0, 1\text{s}, 2\text{s}, 3\text{s}, 4\text{s}$. ראשית הצירים נבחרה במיקום הגוף ברגע $t=0$, ציר x נקבע להיות אופקי בכיוון המהירות ההתחלתית וציר y אנכי כלפי מטה.

א. חשב את המהירות ההתחלתית של הגוף.

ב. חשב את תאוצת הכובד על פני כוכב הלכת.

ג. ב-$t=0$ משוחרר גוף אחר, b, ממנוחה מהראשית $(0,0)$ וגוף נוסף, c, נזרק בכיוון אופקי במהירות גדולה פי 2 ממהירותו של הגוף a. העתק את הגרף

למחברתך וציין בו את מיקומי הגופים b ו-c בזמנים: $t=0, 1\text{s}, 2\text{s}, 3\text{s}, 4\text{s}$, בנוסף למיקום הגוף a בזמנים אלה.



26.

קליע נורה בכיוון אופקי מרובה מגובה מסוים מעל הקרקע, ובאותו זמן קליע אחר משוחרר ממנוחה מאותו גובה.

בהזנחת כוח החיכוך עם האוויר, קבע מי מבין שני הקליעים מגיע קודם לקרקע. הסבר את קביעתך.

27.

מטוס טס בגובה מסוים במהירות אופקית קבועה. ברגע מסוים משתחרר מהמטוס גוף (ממצב מנוחה ביחס למטוס). בהזנחת החיכוך בין הגוף לאוויר:

א. תאר את מסלול הגוף ביחס לצופה הנמצא על הקרקע.

ב. תאר את מסלול הגוף ביחס לצופה הנמצא בתוך המטוס.

28.

מטוס טס בגובה מסוים במהירות אופקית קבועה, v_0. בזמן מסוים ניתק מהמטוס גוף A (ממנוחה ביחס למטוס), וכעבור זמן מסוים, כשהגוף A עדיין בתנועה, משתחרר מהמטוס גוף נוסף, B, גם הוא ממנוחה ביחס למטוס. בהזנחת החיכוך עם האוויר:

א. קבע, ביחס למערכת צירים הצמודה לצופה הנמצא על הקרקע, האם ברגע שחרור הגוף B, הגוף A מקדים את הגוף B בכיוון האופקי, מפגר אחריו או נמצא בדיוק מתחתיו.

ב. ענה על הסעיף הקודם ביחס למערכת צירים הצמודה לצופה הנמצא בתוך המטוס.

29.

גוף נזרק אופקית מנקודה הנמצאת בגובה מסוים מעל פני הקרקע. נתון שמהירות הגוף בזמן מסוים t_1 היא $\vec{v}_1$ ובזמן מאוחר יותר, t_2, מהירותו היא $\vec{v}_2$. הוכח בשתי דרכים שונות שכיוון הווקטור: $\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ מאונך לקרקע (לאופק) ומכוון כלפי מטה.

30.

גוף נזרק אופקית מנקודה הנמצאת בגובה מסוים מעל פני הקרקע. נתון שמהירות הגוף בזמן t_1 היא $\vec{v}_1$. ובזמן $t_1+4\text{s}$ מהירותו היא $\vec{v}_2$. בחר ציר x אופקי, ציר y אנכי שכיוונו החיובי כלפי מטה וחשב את הווקטור $\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$.

31.

שרטט (באותה מערכת צירים) ובאופן מקורב את צורת מסלולו של גוף הנזרק אופקית בשני מקרים: פעם כשהתנגדות האוויר זניחה, ופעם נוספת כשהתנגדות האוויר אינה זניחה.

32.

מנקודה הנמצאת בגובה 45m מעל פני הקרקע משחררים (ממנוחה) גוף שמסתו 0.05kg. רוח אופקית נושבת ומפעילה על הגוף כוח אופקי קבוע שגודלו 0.2N. הזנח את השפעת החיכוך עם האוויר על תנועת הגוף בכיוון אנכי.

בחר מערכת צירים xy במישור תנועת הגוף כך שציר x אופקי, ציר y אנכי כלפי מעלה והראשית במיקום ההתחלתי של הגוף.

א. האם תנועה זו נחשבת לנפילה חופשית? הסבר את תשובתך.

ב. בטא את קואורדינטות המיקום (x,y) של הגוף כפונקציה של הזמן במהלך תנועתו.

ג. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע לקרקע.

ד. חשב את קואורדינטות הנקודה שבה הגוף פוגע בקרקע.

ה. חשב את גודל וכיוון המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

ו. מצא את משוואת המסלול של הגוף, ותאר מסלול זה במלים.

33.

גוף נזרק ב-$t=0$ במהירות אופקית של $20\,m/s$ מגובה רב מעל פני הקרקע. רוח נושבת בכיוון אופקי המנוגד לכיוון המהירות ההתחלתית של הגוף ומפעילה עליו כוח אופקי קבוע שגודלו $0.04\,N$. נתון שהרוח אינה משפיעה על תנועת הגוף בכיוון האנכי. מסת הגוף $0.01\,kg$.

בחר ציר x אופקי בכיוון המהירות ההתחלתית, ציר y אנכי כלפי מעלה ואת ראשית הצירים במיקום הגוף ב-$t=0$.

א. בטא את הקואורדינטות x ו-y של הגוף כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$.

ב. בטא את רכיבי המהירות v_x ו-v_y כפונקציה של הזמן.

ג. חשב את הזמן שבו v_x מתאפס, וחשב את מיקום הגוף בזמן זה.

ד. מצא את הזמן שבו הגוף חוזר ל-$x=0$. חשב את y בזמן זה.

ה. שרטט באופן איכותי את צורת מסלול הגוף מ-$t=0$ ועד לזמן שחישבת בסעיף הקודם.

34.

גוף נזרק ב-$t=0$ מגג של בניין שגובהו $5\,m$ במהירות אופקית שגודלה $5\,m/s$.

בחר מערכת צירים xy שבה ציר x אופקי, ציר y אנכי כלפי מעלה והראשית בנקודה ממנה נזרק הגוף.

א. בהזנחת החיכוך עם האוויר, חשב:

1) את הזמן שבו הגוף פוגע בקרקע.

2) את קואורדינטות נקודת הפגיעה בקרקע.

3) את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

ב. נתון שעל הגוף פועל במהלך תנועתו כוח אופקי קבוע שגודלו $0.2\,N$ וכיוונו בכיוון המהירות ההתחלתית של הגוף. מסת הגוף היא $0.1\,kg$. חשב:

1) את הזמן שבו הגוף פוגע בקרקע.

2) את קואורדינטות נקודת הפגיעה בקרקע.

3) את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

ג. במקרה אחר הגוף משוחרר ממנוחה. תאר את צורת מסלולו (קו ישר, פרבולה או צורה אחרת), אם נתון שעל הגוף פועל אותו כוח אופקי שבסעיף ב'.

4. זריקה בזווית כלפי מטה

35.

גוף נזרק ב-$t=0$ מגג של בניין שגובהו $60\,m$ במהירות התחלתית של $40\,m/s$ בכיוון 30° מתחת לקו האופקי. בחר מערכת צירים xy במישור תנועת הגוף שבה ציר x אופקי, ציר y אנכי כלפי מטה והראשית בנקודה שבה גוף נמצא ב-$t=0$, וענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את הזמן שבו הגוף מגיע אל פני הקרקע.

ב. חשב את קואורדינטות נקודת הפגיעה בקרקע.

ג. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

ד. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן מ-$t=0$ ועד זמן הפגיעה בקרקע.

36.

גוף נזרק ב-$t=0$ במהירות התחלתית של $30\,m/s$ בכיוון 30° מתחת לקו האופקי. מצא את הזמן שעבורו:

א. העתק הגוף בכיוון אופקי הוא $45\,m$.

ב. רכיב מהירות הגוף בכיוון אנכי הוא $60\,m/s$.

ג. הגוף נמצא $20\,m$ מתחת לנקודת הזריקה.

37.

מטוס נע בכיוון היוצר זווית בת 40° מתחת לקו האופקי. כאשר הוא נמצא בגובה $900\,m$ מעל הקרקע גוף משתחרר מהמטוס ממנוחה ביחס אליו. הגוף מגיעה אל פני הקרקע תוך 4 שניות. נתון שהתנגדות האוויר זניחה.

א. חשב את מהירות המטוס ברגע שבו הגוף השתחרר ממנו.

ב. חשב את ההעתק של הגוף בכיוון אופקי מרגע שבו השתחרר ועד פגיעתו בקרקע.

ג. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

5. תנועה בהשפעת כוח קבוע

38.

מהי צורת מסלולו של גוף כאשר פועל עליו כוח שקול קבוע:

א. בכיוון מהירותו.

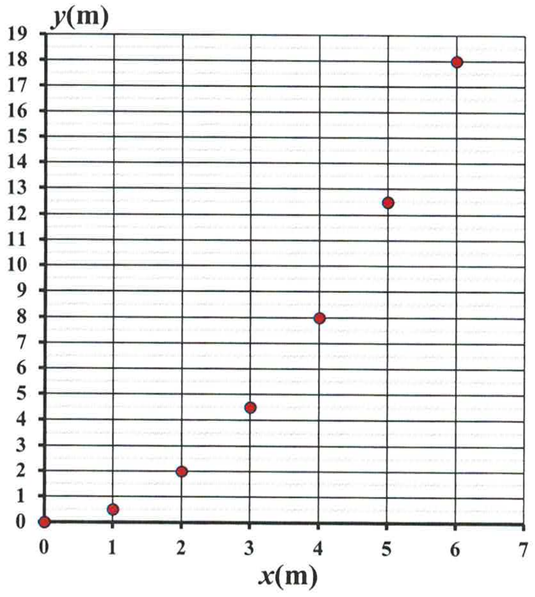
ב. בכיוון מנוגד לכיוון מהירותו.

ג. בניצב לכיוון מהירותו.

ד. בכיוון היוצר זווית ביחס למהירותו.

39.

נתונים שלושה גופים: A, B ו-C. ראשית מניחים את הגוף A על משטח אופקי חלק, ומקנים לו בזמן $t=0$ מהירות התחלתית v_0 בכיוון ציר x. על הגוף פועל כוח קבוע בכיוון ציר y, כוח שגורם לו לנוע בתאוצה קבועה בכיוון ציר זה. בגרף שלפניך מוצג מיקום הגוף A במערכת xy בזמנים עוקבים שהפרשי הזמן ביניהם 0.5s.



א. חשב את המהירות ההתחלתית v_0.

ב. חשב את תאוצת הגוף בכיוון ציר y.

ג. בטא את קואורדינטות המיקום של הגוף; x ו-y כפונקציה של הזמן.

ד. מצא את משוואת המסלול של הגוף.

ה. ב-$t=0$ משחררים ממנוחה את הגוף B מראשית הצירים, ובנוסף, הגוף C מקבל מהירות התחלתית בכיוון ציר x שגודלה מחצית מהירותו ההתחלתית של גוף A. נתון שלגופים B ו-C יש אותה תאוצה בכיוון ציר y כמו לגוף A.
העתק את הגרף למחברתך והוסף בו את המיקומים של הגופים B ו-C בזמנים: $t=0, 0.5, 1.0, \cdots, 3\text{s}$, בנוסף למקומות הגוף A בזמנים אלה.

40.

קבע מהי צורת המסלול של גוף שעבורו $a_x=0$ ו-a_y קבוע.

6. תנועה מעגלית וגדלים קינמטיים בתנועה מעגלית

41.

א. הסבר איך נקבע מיקומו של גוף הנע במסלול מעגלי בנקודה מסוימת על המסלול.

ב. הגדר את יחידת הזווית רדיאן.

ג. הגדר מעלה אחת.

ד. חשב את מספר הרדיאנים במעגל שלם.

ה. מהו הקשר המספרי בין הרדיאן והמעלות?

42.

נתון מעגל שרדיוסו 20cm. חשב את אורך הקשת הנמצאת מול הזוויות המרכזיות הבאות במעגל זה:

א. 0.5rad.

ב. 1rad.

ג. 1.5rad.

ד. $2\pi\,\text{rad}$.

43.

נתון מעגל שרדיוסו 20cm. חשב את הזוויות המרכזיות שמול הקשתות הבאות במעגל זה:

א. 20cm.

ב. 40cm.

ג. 60cm.

ד. 180cm.

44.

א. הגדר את המהירות הקווית בתנועה מעגלית.

ב. הגדר את המהירות הזוויתית בתנועה מעגלית.

ג. נתון גוף הנע במסלול מעגלי שרדיוסו R במהירות קווית קבועה, v. הראה שמהירותו הזוויתית נתונה על ידי $\omega = v / R$.

45.

גוף נע במסלול מעגלי במהירות קווית לא קבועה. בחר את המשפט הנכון:

א. לגוף יש תאוצה משיקית וגם תאוצה רדיאלית.

ב. לגוף יש תאוצה משיקית בלבד.

ג. לגוף יש תאוצה רדיאלית בלבד.

46.

א. הוכח כי לגוף הנע בתנועה מעגלית קצובה יש תאוצה המכוונת לכיוון מרכז המעגל.

ב. חשב את התאוצה הצנטריפטלית של גוף הנע במהירות קווית שגודלה $4\,\mathrm{m/s}$ במסלול מעגלי שרדיוסו $10\,\mathrm{m}$.

ג. חשב את התאוצה הצנטריפטלית של גוף הנע במהירות זוויתית של $2\,\mathrm{rad/s}$ במסלול מעגלי שרדיוסו $4\,\mathrm{m}$.

47.

א. הגדר את זמן המחזור ואת התדירות בתנועה מעגלית קצובה.

ב. מהו הקשר בין זמן המחזור והתדירות בתנועה מעגלית קצובה?

ג. בטא את זמן המחזור ואת התדירות הסיבוב בתנועה מעגלית קצובה באמצעות:

1) המהירות הזוויתית ω.

2) המהירות הקווית v ורדיוס הסיבוב R.

48.

מכונית צעצוע מונחת על משטח אופקי וקשורה, באמצעות חוט שאורכו $0.8\,\mathrm{m}$, לציר סיבוב אנכי המחובר למשטח. מפעילים את מנוע המכונית והיא מתחילה לנוע על המשטח במסלול מעגלי במהירות קווית קבועה שגודלה $0.4\,\mathrm{m/s}$. נתון שבמהלך תנועת המכונית החוט מתוח ומקביל למשטח.

א. מצא את רדיוס המסלול המעגלי של המכונית.

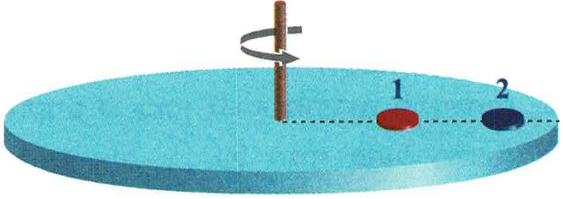
ב. האם יש למכונית תאוצה בכיוון המשיק? אם השבת כן חשב את גודלה ואם השבת לא, הסבר את תשובתך.

ג. האם יש למכונית תאוצה בכיוון רדיאלי? אם השבת כן חשב את גודלה ואם השבת לא, הסבר את תשובתך.

ד. חשב את זמן המחזור של התנועה המעגלית של המכונית ואת תדירותה.

49.

תקליט מסתובב במישור אופקי סביב ציר שעובר במרכזו. על התקליט מונחים שני גופים 1 ו-2 כפי שמתואר בתרשים שלפניך.



מרחק גוף 1 מציר הסיבוב הוא r_1 ומרחק גוף 2 מציר הסיבוב הוא r_2 $(r_2 > r_1)$. הגופים מסתובבים ביחד עם התקליט. ענה על השאלות הבאות. בטא את תשובותיך באמצעות הגדלים r_1 ו-r_2.

א. מהו היחס בין זמני המחזור של שני הגופים (T_2 / T_1)?

ב. מהו היחס בין המהירויות הזוויתיות של שני הגופים (ω_2 / ω_1)?

ג. מהו היחס בין המהירויות הקווית של שני הגופים (v_2 / v_1)?

ד. מהו היחס בין התאוצות הצנטריפטלית של שני הגופים (a_{c2} / a_{c1})?

50.

נתון גלגל שרדיוסו $40\,\mathrm{cm}$ המסתובב סביב צירו במהירות זוויתית קבועה. נתון שכל נקודה הנמצאת על היקף הגלגל עוברת מטר אחד בכל שתי שניות.

א. חשב את המהירויות הקווית והזוויתית של הגלגל.

ב. חשב את תדירות הסיבוב של הגלגל.

ג. חשב את זמן המחזור של הגלגל.

ד. חשב את הזווית שעוברת נקודה הנמצאת

על היקף הגלגל במשך 10 שניות.

ה. חשב את הדרך שעוברת נקודה הנמצאת על היקף הגלגל במשך 10 שניות.

7. דינמיקה של תנועה מעגלית קצובה

51.

א. הגדר תנועה מעגלית קצובה.

ב. קבע מהו כיוון תאוצת גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה. הוכח קביעתך.

ג. מהו תפקידה של התאוצה בתנועה מעגלית קצובה.

ד. בטא את תאוצתו של גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה באמצעות המהירות הקווית של הגוף, v, ורדיוס הסיבוב, R.

52.

א. הסבר מדוע על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה חייב לפעול כוח, והוכח שכיוון הכוח השקול הוא בכיוון מרכז המסלול המעגלי.

ב. בטא את גודלו של הכוח הפועל על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה (הכוח הצנטריפטלי) באמצעות המהירות הקווית של הגוף, v, מסת הגוף m ורדיוס הסיבוב R.

53.

קבע מהו מקור הכוח הצנטריפטלי בתנועות המעגליות הבאות:

א. תנועת כדור הארץ סביב השמש.

ב. תנועת האלקטרון סביב הפרוטון באטום המימן.

ג. תנועת מכונית בסיבוב מעגלי הנמצא במישור אופקי.

ד. תנועת מטבע המונח על תקליט המסתובב במישור אופקי סביב צירו במהירות זוויתית קבועה. נתון כי המטבע מסתובב ביחד עם התקליט ואינו מחליק עליו.

54.

קבע אילו מבין המשפטים הבאים נכונים ואילו שגויים. הסבר את קביעתך לגבי כל משפט.

א. המהירות (כווקטור) בתנועה מעגלית קצובה היא קבועה.

ב. התאוצה (כווקטור) בתנועה מעגלית קצובה היא קבועה.

ג. גודל התאוצה בתנועה מעגלית קצובה קבוע.

ד. כיוון התאוצה בתנועה מעגלית קצובה קבוע.

ה. התאוצה המשיקית בתנועה מעגלית קצובה שווה לאפס.

ו. אם התנועה המעגלית לא קצובה, גודלה של התאוצה הצנטריפטלית אינו קבוע.

55.

גוף שמסתו $0.4\,\mathrm{kg}$ נע במסלול מעגלי שרדיוסו $2\,\mathrm{m}$ במהירות זוויתית קבועה שגודלה $3\,\mathrm{rad/s}$.

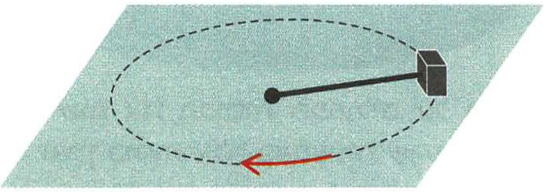
א. מצא את גודלה וכיוונה של תאוצת הגוף.

ב. מצא את גודלו וכיוונו של הכוח השקול הפועל על הגוף.

8. בעיות בדינמיקה של תנועה מעגלית קצובה

56.

בתרשים שלפניך מתואר גוף המונח על משטח אופקי וחלק. הגוף קשור, באמצעות חוט שמסתו זניחה, לציר סיבוב אנכי המחובר למשטח. הגוף נע על המשטח בתנועה מעגלית קצובה. במהלך תנועת הגוף החוט מתוח ומקביל למשטח.



נתון: מסת הגוף $0.5\,\mathrm{kg}$, אורך החוט $80\,\mathrm{cm}$ והמהירות הקווית של הגוף היא $2\,\mathrm{m/s}$.

א. העתק את התרשים למחברתך והוסף לו חיצים המייצגים את הכוחות הפועלים על הגוף. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

ב. חשב את הכוחות שציינת בסעיף הקודם.

ג. חשב את המהירות הקווית המקסימלית בה מותר לגוף לנוע על מנת שהחוט לא יקרע, אם נתון שהחוט יכול לשאת מתיחות מקסימלית של $6\,\mathrm{N}$.

ד. ברגע מסוים החוט נקרע. שרטט (במבט על) את מסלולו של הגוף על המשטח לאחר קריעת החוט.

57.

מחליפים את החוט בבעיה הקודמת בקפיץ שמסתו זניחה ושהקבוע שלו $10\,\mathrm{N/m}$.

כאשר הגוף מסתובב במהירות זוויתית שגודלה $2\,\mathrm{rad/s}$ רדיוס מסלולו הוא $40\,\mathrm{cm}$.

א. חשב את התארכות הקפיץ.

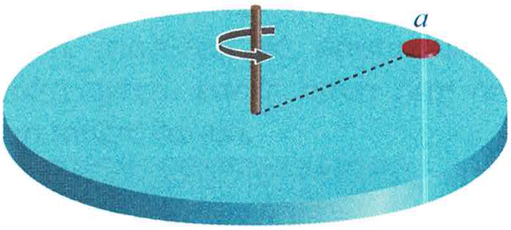
ב. חשב את אורך הקפיץ במצב רפוי.

ג. חשב את המהירות הזוויתית המקסימלית המותרת עבור הגוף על מנת שהקפיץ לא ייצא מהתחום האלסטי, אם נתון שהקפיץ מאבד את האלסטיות שלו בהתארכות מעל ל- $50\,\mathrm{cm}$.

58.

תקליט מסתובב במהירות זוויתית קבועה שגודלה $1.5\,\mathrm{rad/s}$ במישור אופקי סביב ציר שעובר במרכזו. במרחק $20\,\mathrm{cm}$ ממרכז התקליט מונח מטבע שמסתו $20\,\mathrm{g}$. המטבע מסתובב ביחד עם התקליט בהשפעת כוח החיכוך (ראה תרשים).

נתון שמקדם החיכוך הסטטי בין המטבע לתקליט הוא 0.48.



א. רשום את הכוחות הפועלים על המטבע וציין כוחות אלה באמצעות שרטוט חיצים המראים את כיוונם של כוחות אלה. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

ב. חשב את הכוחות שציינת בסעיף הקודם.

ג. חשב את המהירות הזוויתית המקסימלית האפשרית עבור התקליט על מנת שהמטבע לא יתנתק מהתקליט, וחשב את תדירות הסיבוב ואת זמן המחזור של התקליט במצב זה.

בהמשך מניחים שני מטבעות זהים על התקליט. הראשון במרחק $20\,\mathrm{cm}$ מציר הסיבוב, והשני במרחק $40\,\mathrm{cm}$ מציר הסיבוב. מסובבים את התקליט במהירות שהולכת וגדלה בהדרגה.

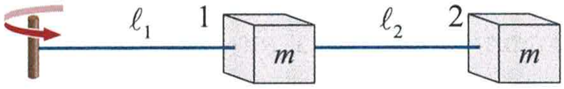
ד. קבע איזה מבין שני המטבעות מתנתק ראשון מהתקליט.

ה. חשב את התדירות שבה מתנתק המטבע בסעיף הקודם.

59.

שני גופים זהים 1 ו-2, מסת כל אחד מהם m, קשורים זה לזה באמצעות חוט שאורכו ℓ_2 ומונחים על משטח אופקי וחלק. הגוף 1 קשור גם לציר סיבוב אנכי המחובר למשטח, וזאת באמצעות חוט נוסף שאורכו ℓ_1 (ראה תרשים).

שני הגופים מסתובבים סביב ציר הסיבוב במהירות זוויתית ω כך שכל הזמן הם נמצאים ביחד עם ציר הסיבוב על קו ישר אחד.



נתון שממדי הגופים זניחים ביחס לאורכי החוטים, ושמסות החוטים ניתנות להזנחה.

א. קבע על מי מבין שני הגופים פועל כוח שקול גדול יותר, 1 או 2. הסבר את קביעתך.

ב. קבע באיזה משני החוטים המתיחות גדולה יותר, הפנימי או החיצוני. הסבר את קביעתך.

ג. מצא את המתיחות בשני החוטים. בטא את תשובתך באמצעות נתוני השאלה (כולם או חלקם).

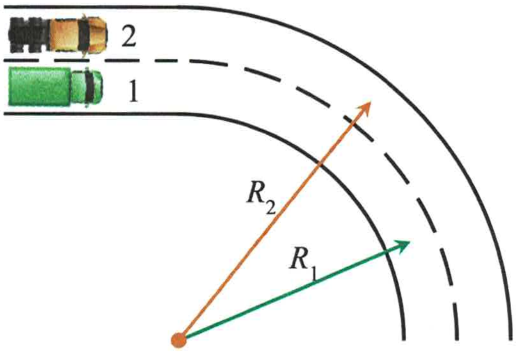
ד. נתון $m = 0.2\,\mathrm{kg}$, $\ell_1 = \ell_2 = 0.4\,\mathrm{m}$ ושהמתיחות המקסימלית שכל אחד משני החוטים יכול לשאת היא $24\,\mathrm{N}$. חשב את המהירות הזוויתית המקסימלית, $\omega_{\max}$, האפשרית עבור המערכת על מנת שאף אחד מבין שני החוטים לא יקרע.

60.

שתי מכוניות 1 ו-2 נעות בסיבוב מעגלי במהירות קווית שווה וקבועה, v, כפי שמתואר בתרשים הבא.

נתון שמסות שתי המכוניות זהות, m כל אחת, שרדיוס הסיבוב של מכונית 1 הוא R_1 ושל מכונית 2 הוא R_2. מתקיים $R_2 > R_1$

(ראה תרשים).



א. קבע למי מבין שתי המכוניות יש מהירות זוויתית גדולה יותר. הסבר את קביעתך.

ב. מצא את הכוח הצנטריפטלי הפועל על כל אחת משתי המכוניות. בטא את תשובתך באמצעות נתוני הבעיה (כולם או חלקם).

ג. קבע למי מבין שתי המכוניות הסתברות ההחלקה גבוהה יותר.

ד. מצא את מקדם החיכוך הסטטי הקטן ביותר, $\mu_{s\,\min}$, על מנת שאף אחת משתי המכוניות לא תחליק. בטא את תשובתך באמצעות נתוני הבעיה (כולם או חלקם).

61.

מכונית נעה במסלול מעגלי הנמצא במישור אופקי. נתון שמקדם החיכוך הסטטי בין צמיגי המכונית והכביש הוא 0.9.

א. חשב את המהירות המקסימלית האפשרית עבור המכונית על מנת שלא תחליק, אם נתון שרדיוס הסיבוב הוא $36\,\text{m}$.

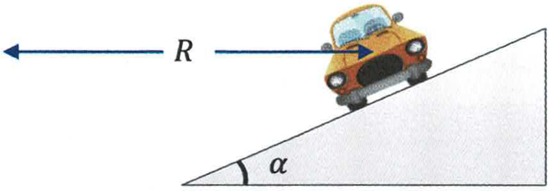
ב. חשב את גדלו של החיכוך הסטטי שפועל בכיוון מרכז הסיבוב אם נתון שמהירות המכונית היא מחצית המהירות שחישבת בסעיף הקודם ושמסת המכונית היא $1{,}000\,\text{kg}$.

62.

בתרשים שלפניך מוצגת מכונית הנוסעת במעקום מעגלי מוגבה במסלול שרדיוסו R. נתון שזווית השיפוע של הכביש לרוחבו היא α (ראה תרשים).

א. רשום את הכוחות הפועלים על המכונית במהלך תנועתה במסלול המתואר, וציין כוחות אלה באמצעות שרטוט חיצים המראים את כיוונם של כוחות אלה. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

ב. בחר במערכת צירים מתאימה לניתוח בעיה זו, והסבר את בחירתך.



ג. הסבר בעזרת מערכת הצירים שבחרת ובעזרת חוקי ניוטון כיצד עוזר שיפוע הכביש בהקטנת סכנת ההחלקה בפניות.

ד. מצא את המהירות בה המכונית צריכה לנסוע במסלול המעגלי המוגבה על מנת שהחיכוך הסטטי הפועל על צמיגי המכונית בכיוון המקביל לכביש ולרוחבו יתאפס. בטא את תשובתך באמצעות R ו- α.

ה. חשב את המהירות בסעיף הקודם אם נתון: $R = 60\,\text{m}$ ו- $\alpha = 15^\circ$.

63.

בתרשים שלפניך מתואר במבט קדמי מטוס הנע במסלול מעגלי. מסלול זה נמצא במישור אופקי המקביל לפני כדור הארץ. בצילום נראה שיפוע של גוף המטוס ביחס למישור האופקי.

נתון: רדיוס המסלול המעגלי של המטוס הוא R והזווית בין גוף המטוס והמישור האופקי היא α.

א. רשום את הכוחות הפועלים על המטוס, בחתך המתואר בתרשים, במהלך תנועתו במסלול המעגלי, וציין כוחות אלה באמצעות שרטוט חיצים המראים את כיוונם של כוחות אלה. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

ב. הסבר מדוע במהלך פניית המטוס במסלול מעגלי חייב שיהיה שיפוע בין גוף המטוס למישור הסיבוב, כפי שמתואר בתמונה.

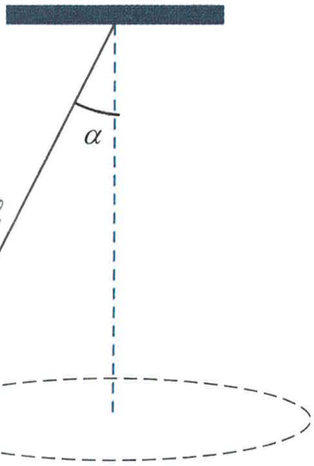
ג. מצא את זווית השיפוע של גוף המטוס הדרושה עבור מהירות מסוימת v. הבע את תשובתך באמצעות הגדלים v, R ו-

.α

ד. חשב את מהירות המטוס אם נתון: $R=200\text{m}$ ו- $\alpha=20^\circ$.

.64

בתרשים שלפניך מתוארת מטוטלת קונית שבה מסת הגוף היא 100g ואורך החוט 50cm. נתון שגודל הזווית α המתוארת בתרשים היא 30°.



א. רשום את הכוחות הפועלים על הגוף במהלך תנועתו במסלול המעגלי, וציין כוחות אלה באמצעות שרטוט חיצים על הגוף המראים את כיוונם של כוחות אלה. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

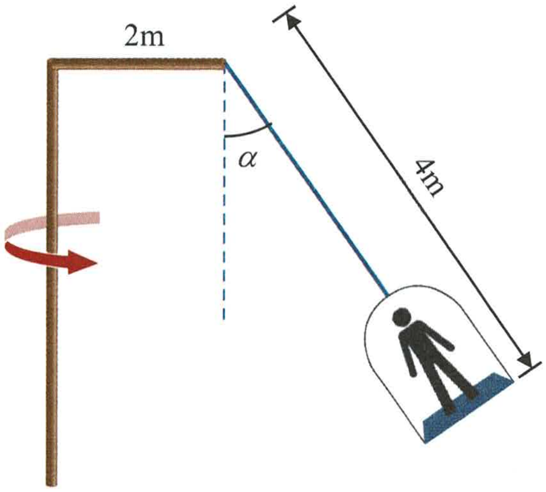
ב. קבע מהו כיוון תאוצת הגוף ואת כיוון הכוח השקול הפועל עליו.

ג. בחר במערכת צירים מתאימה וחשב את הכוחות שציינת בסעיף א'.

ד. חשב את המהירויות הזוויתית והקווית של הגוף ואת זמן המחזור של תנועתו המעגלית.

.65

בתרשים שלפניך מוצג מתקן המורכב ממוט מתכתי אנכי המסתובב סביב עצמו. למוט זה מחובר מוט מתכתי נוסף, אופקי, שאורכו $L=2\text{m}$. לקצה מוט זה קשור קצה חבל ובקצהו האחר של החבל קשור תא שבתוכו עומד אדם על מאזני כוח הנמצאים על קרקעית התא. נתון שמרחק בסיס המאזניים מקצה המוט האופקי הוא $\ell=4\text{m}$. כתוצאה מסיבוב המערכת נוצרת זווית α בין החבל לבין הקו האנכי (ראה תרשים).



נתון: מסת האדם היא 50kg, מסת התא היא 20kg וקריאת מאזני הכוח היא $1{,}000\text{N}$. מסת החבל זניחה.

א. חשב את הזווית α.

ב. חשב את המתיחות בחבל.

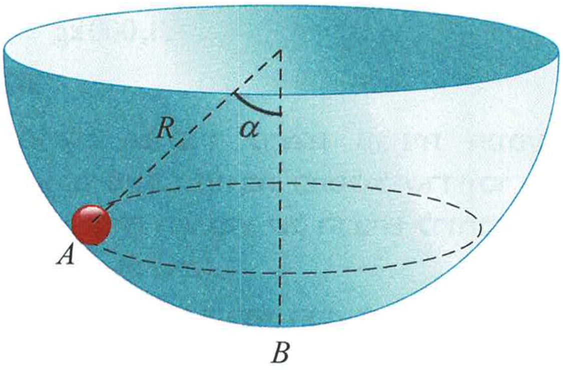
ג. מצא את גודלה וכיוונה של תאוצת האדם.

ד. מצא את גודלו וכיוונו של הכוח השקול הפועל על האדם.

ה. חשב את זמן המחזור של התנועה המעגלית של האדם.

.66

כדור שמסתו m נע במסלול מעגלי אופקי הנמצא בתוך כלי חצי כדורי שרדיוסו R, כפי שמתואר בתרשים הבא.



נתון שתדירות הסיבוב של הכדור היא f

ושהזווית בין האנך לבין הקו המחבר בין מרכז הכלי הכדורי והכדור היא α (ראה תרשים).

א. רשום את הכוחות הפועלים על הכדור במהלך תנועתו במסלול המעגלי, וציין כוחות אלה באמצעות שרטוט חיצים על הכדור, המראים את כיוונם של כוחות אלה. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

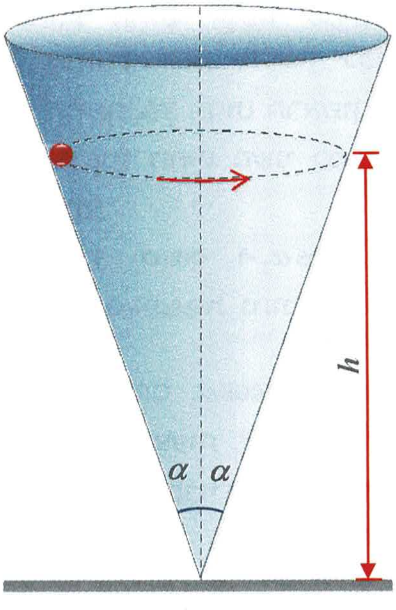
ב. בטא את גודלה של הזווית α באמצעות תדירות הסיבוב f ורדיוס הסיבוב R.

ג. מה יקרה לזווית α ככל שתדירות הסיבוב גדלה.

ד. האם קיים מצב שבו $\alpha = 90^\circ$. הסבר את תשובתך.

67.

בתרשים שלפניך מתואר כדור שמסתו m המסתובב במסלול מעגלי אופקי בתוך חרוט המוצב על ראשו על משטח אופקי כך שצירו מאונך לפני המשטח.



נתון שזווית הראש של החרוט היא 2α ושגובה המסלול המעגלי של הכדור מעל המשטח הוא h.

א. רשום את הכוחות הפועלים על הכדור במהלך תנועתו במסלול המעגלי, וציין כוחות אלה באמצעות שרטוט חיצים המראים את כיוונם. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

ב. בטא את הכוח הנורמלי הפועל על הכדור באמצעות mg ו- α.

ג. בטא את המהירות הזוויתית של הכדור באמצעות h ו- α.

ד. נתון חרוט דומה שבתוכו מסתובבים שני כדורים במסלולים מעגליים המקבילים למישור המשטח האופקי. גובה המסלול המעגלי של הכדור הראשון מעל למשטח הוא h_1 וגובהו של המסלול המעגלי של הכדור השני מעל אותו משטח הוא h_2 $(h_2 > h_1)$. בטא באמצעות נתוני הבעיה (כולם או חלקם) את:

1) היחס בין המהירויות הזוויתיות של שני הכדורים (ω_2 / ω_1).

2) היחס בין המהירויות הקוויות של שני הכדורים (v_2 / v_1).

3) היחס בין הכוחות הנורמליים הפועלים על שני הכדורים (N_2 / N_1).

4) היחס בין תאוצות שני הכדורים (a_{c2} / a_{c1}).

בעיות כלליות בתנועה מעגלית

68.

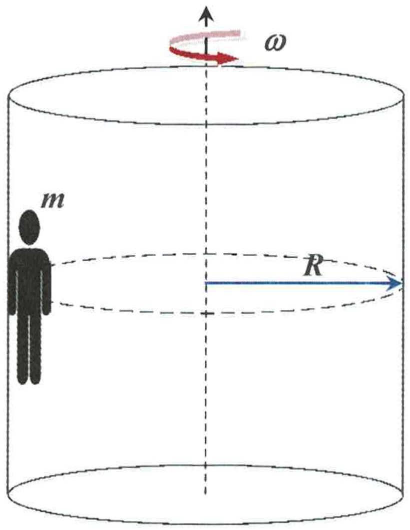
ידוע שמשקל האסטרונאוטים בתוך חללית הנעה כלוויין סביב כדור הארץ מתאפס. על מנת לתת לאסטרונאוטים תחושת משקל בתוך החללית, נבנתה חללית גלילית היכולה להסתובב סביב צירה במהירות זוויתית שניתן לשלוט בה.

א. חשב את תדירות הסיבוב הדרושה עבור חללית זו על מנת שהאסטרונאוטים הצמודים לדפנותיה הפנימיים ירגישו שמשקלם זהה לזה שעל פני כדור הארץ אם נתון שרדיוס החללית הוא 8m.

ב. האם האסטרונאוטים הנמצאים בתוך החללית במקרה זה ירגישו בסיבוב החללית ויסבלו מסחרחורת?

69.

בתרשים שלפניך מתואר מתקן בגן שעשועים המורכב מגליל ענק המוצב על בסיס מיוחד כך שצירו ניצב לפני הקרקע, ומאפשר לגליל להסתובב סביב צירו במהירות זוויתית הניתנת לשינוי.



בתוך הגליל נמצא משטח אופקי עליו עומדים אנשים כשגבם צמוד לדופן הפנימית של הגליל. מסובבים את הגליל במהירות זוויתית ההולכת וגדלה בהדרגה עד למהירות מספיק גבוהה. בשלב זה מורידים את המשטח עליו עומדים האנשים כלפי מטה, והאנשים נשארים צמודים לדופן הפנימית של הגליל ומסתובבים ביחד אתה כשהם מוחזקים על ידי כוח החיכוך בלבד (ראה תרשים).

נתון שהגליל מסתובב במהירות זוויתית ω, שהרדיוס הפנימי של הגליל הוא R, שמסת אדם הצמוד לדופן הפנימית של הגליל היא m ושמקדמי החיכוך הסטטי והקינטי בינו לבין הדופן הפנימית של הגליל הם μ_s ו-μ_k, בהתאמה.

א. רשום את הכוחות הפועלים על האדם במהלך תנועתו במסלול המעגלי, וציין כוחות אלה באמצעות שרטוט חיצים המראים את כיוונם. ליד כל חץ רשום את שם הכוח.

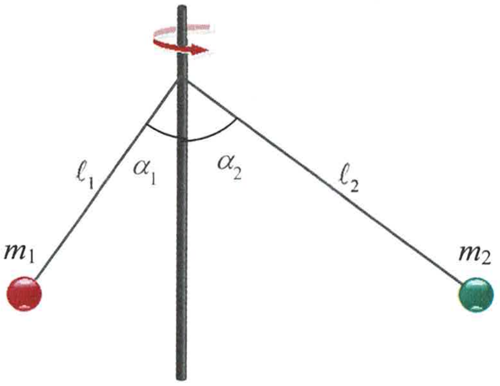
ב. בטא את הכוחות שציינת בסעיף הקודם באמצעות נתוני השאלה, כולם או חלקם.

ג. מצא את המהירות הזוויתית המינימלית האפשרית, $\omega_{\min}$, על מנת שהאדם לא יחליק על גבי דופן הגליל במהלך סיבובה. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים: R, g ו-μ_s.

ד. מצא את גודלו של כוח החיכוך הסטטי הפועל על האדם אם המהירות הזוויתית גדולה פי 2 מהמהירות הזוויתית שמצאת בסעיף הקודם.

.70

בתרשים שלפניך מתואר מוט מתכתי אנכי המסתובב סביב ציר האורך שלו במהירות זוויתית קבועה ω. שני כדורים קטנים 1 ו-2 קשורים לקצה העליון של המוט באמצעות שני חוטים שונים. כתוצאה מסיבוב המוט סביב צירו, שני הכדורים מסתובבים במסלולים מעגליים המקבילים לפני הקרקע (ראה תרשים).



נתון שמסות שני הכדורים זהות, m כל אחת מהן, שאורך החוט הקשור לכדור הראשון הוא ℓ_1 ושאורך החוט הקשור לכדור השני הוא ℓ_2. הזווית בין החוט הראשון למוט היא α_1 והזווית בין החוט השני למוט היא α_2 (ראה תרשים).

א. מצא את $\cos\alpha_1$ ו-$\cos\alpha_2$. הבע את תשובתך באמצעות נתוני השאלה, כולם או חלקם.

ב. מצא את היחס $\cos\alpha_2 / \cos\alpha_1$. בטא את תשובתך באמצעות ℓ_1 ו-ℓ_2.

ג. הוכח ששני הכדורים מסתובבים באותו מישור אופקי.

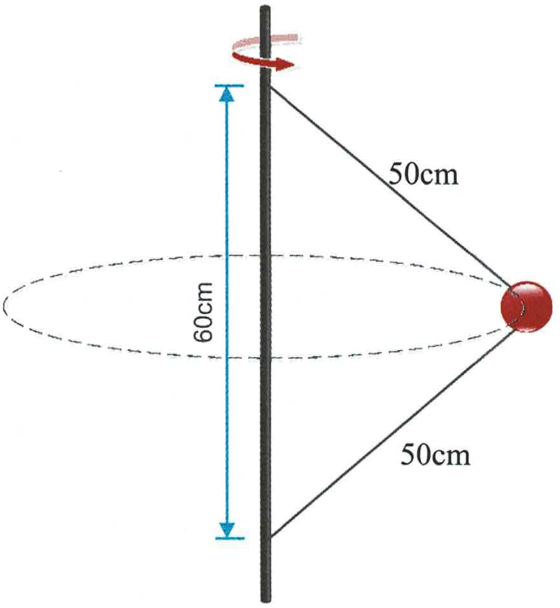
ד. קבע על מי מבין שני הכדורים פועל כוח שקול גדול יותר. הסבר את קביעתך.

.71

בתרשים שלפניך מוצג מוט אנכי המסתובב סביב ציר האורך שלו בתדירות של $4\,\mathrm{Hz}$. למוט קשורים שני חוטים בשתי נקודות שונות המרוחקות זו מזו ב-$60\,\mathrm{cm}$. הקצוות האחרים של שני החוטים קשורים לגוף שמסתו $2\,\mathrm{kg}$. לחוטים יש אורך זהה, $50\,\mathrm{cm}$ כל אחד.

כתוצאה מסיבוב המוט סביב צירו, הגוף

מסתובב במסלול מעגלי המקביל לפני הקרקע האופקיים. נתון ששני החוטים מתוחים במהלך סיבוב הגוף (ראה תרשים).



א. חשב את גודל הזווית בין כל אחד משני החוטים והמוט.

ב. חשב את המתיחות בכל אחד משני החוטים.

ג. מצא את התדירות של הסיבוב שעבורה המתיחות בחוט התחתון מתאפסת.

ד. חשב את המתיחות בחוט העליון במקרה המתואר בסעיף הקודם.

9. מהירות יחסית במישור

72.

שני גופים 1 ו-2 נזרקים אופקית בשני כוונים מנוגדים, מאותה נקודה הנמצאת בגובה מסוים מעל פני הקרקע. הגוף הראשון נזרק לכיוון ימין במהירות התחלתית שגודלה v_0, והגוף השני נזרק במהירות שגודלה זהה לכיוון שמאל.

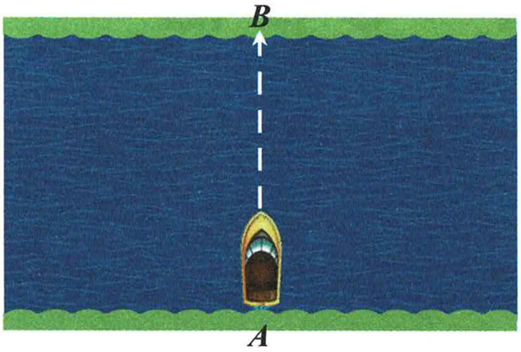
א. חשב את מהירות הגוף הראשון ביחס לגוף השני בכיוון אנכי.

ב. חשב את מהירות הגוף הראשון ביחס לגוף השני בכיוון אופקי.

ג. תאר את מסלולו של הגוף הראשון ביחס לגוף השני.

73.

נתון שמהירות סירת מנוע ביחס למים היא $5\,m/s$. רוצים לחצות באמצעות סירה זו נהר שרוחבו $500\,m$ לאורך הקו AB הניצב לגדות הנהר, כפי שמתואר בתרשים שלפניך.



א. חשב את הזמן הדרוש לסירה לחצות את הנהר לאורך AB אם מי הנהר נמצאים במנוחה (לא זורמים).

ב. נתון כעת שמי הנהר זורמים במהירות קבועה של $2\,m/s$ בכיוון ימין (בתרשים למעלה). במצב זה חשב את:

1) הכיוון שאליו עלינו לכוון את הסירה, ביחס לגדת הנהר, על מנת שהסירה תתקדם לאורך הקו AB.

2) מהירות הסירה ביחס לגדת הנהר.

3) הזמן הדרוש לסירה להגיע לנקודה B.